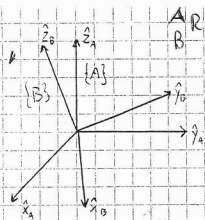


10 ODIO LA ROBOTICA (1)

ROBOTICA - TOP 21

- 1) \hat{R} e proprietà ✓
- 2) interpretazioni di \hat{S} ✓
- 3) inversione di \hat{S} ✓
- 4) notazione per assi fissi ✓
- 5) notazione per assi mobili/Eulers } prezzo funzionamento, anche di ogni ✓
- 6) derivata della matrice di rotazione ✓
- 7) funzione Atan2 ✓
- 8) forma di Craig ✓
- 9) $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ ✓
- 10) velocità lineare e angolare di corpi rigidi ✓
- 11) Jacobiano geometrico e analitico, confronti ✓
- 12) ~~12~~ tensore di inerzia, singolarità cinematiche e cinematiche \mathbb{R}^3 ✓
- 13) statica dei manipolatori ✓
- 14) ~~14~~ controllore PID a giunti indipendenti ✓
- 15) ~~15~~ controllore con compensazione di gravità ✓
- 16) ~~16~~ controllore a dinamica inversa ✓
- 17) ~~17~~ controllore a coppia precalcolata ✓
- 18) ~~18~~ piani fissare una traiettoria mediante funzioni lineari quadratiche, supportando assegnati $\theta_i, \theta_f, \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_f, t_f$ (tempo di percorrenza della traiettoria), $\ddot{\theta}_0$ (accelerazione massima dei tratti iniziali e finali). Specificare per quali valori di $\ddot{\theta}_0$ la soluzione non esiste. ✓
- 19) ~~19~~ piani fissare nello spazio operativo ✓
- 20) ~~20~~ traiettoria multi-punto ✓
- 21) ~~21~~ piani fissare punto-punto con raccordi cubici (spazio dei giunti) ✓
- 22) Algoritmo Renshaw Vel/Acc - linear/step per i bracci dei manipolatori (40 TRIS)

①


 A
 B
 PROPRIETA'

②

Orientamento di $\{B\}$ rispetto ad $\{A\}$:
$${}^A R = [x_0 \ y_0 \ z_0]$$
 dove x, y, z sono i versori di $\{B\}$ descritti rispetto ad $\{A\}$

$${}^A R = [x_0 \ y_0 \ z_0] = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \cdot \hat{x}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{x}_1 & \hat{z}_0 \cdot \hat{x}_1 \\ \hat{x}_0 \cdot \hat{y}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{y}_1 & \hat{z}_0 \cdot \hat{y}_1 \\ \hat{x}_0 \cdot \hat{z}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{z}_1 & \hat{z}_0 \cdot \hat{z}_1 \end{bmatrix}$$

Poiché i prodotti scalari sono tra versori, il risultato sarà sempre il coseno nell'angolo compreso. Per esempio, $\hat{x}_0 \cdot \hat{x}_1 = \|\hat{x}_0\| \|\hat{x}_1\| \cos \alpha = \cos \alpha$.

Per questo motivo si chiama anche "matrice dei coseni direttori".

PROPRIETA'

$$1- {}^A R = {}^B R^T$$

$$\dim \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \cdot \hat{x}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{x}_1 & \hat{z}_0 \cdot \hat{x}_1 \\ \hat{x}_0 \cdot \hat{y}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{y}_1 & \hat{z}_0 \cdot \hat{y}_1 \\ \hat{x}_0 \cdot \hat{z}_1 & \hat{y}_0 \cdot \hat{z}_1 & \hat{z}_0 \cdot \hat{z}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_1^T \\ \hat{y}_1^T \\ \hat{z}_1^T \end{bmatrix}$$

Trasponendo, le righe diventano colonne

$${}^A R^T = [{}^0 \hat{x}_1 \ | \ {}^0 \hat{y}_1 \ | \ {}^0 \hat{z}_1] = {}^B R \quad \text{QED}$$

$$2- {}^A R^{-1} = {}^A R^T \quad (\text{ortogonalità})$$

$$\dim \begin{bmatrix} {}^0 \hat{x}_1^T \\ {}^0 \hat{y}_1^T \\ {}^0 \hat{z}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0 \hat{x}_1 & {}^0 \hat{y}_1 & {}^0 \hat{z}_1 \end{bmatrix}$$

Eseguendo il prodotto riga per colonna si ottiene 1 se si ha il prodotto di un vettore trasposto con se stesso (es. ${}^0 \hat{x}_1^T \cdot {}^0 \hat{x}_1 = {}^0 \hat{x}_1 \cdot {}^0 \hat{x}_1 = 1$) oppure 0 negli altri casi (es. ${}^0 \hat{x}_1^T \cdot {}^0 \hat{y}_1 = {}^0 \hat{x}_1 \cdot {}^0 \hat{y}_1 = 0$).

$${}^A R {}^A R^T = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^A R^{-1} {}^A R = I \Rightarrow {}^A R^{-1} = I \cdot {}^A R^{-1} = {}^A R^{-1} \Rightarrow$$

Nota: l'identità $\hat{x}\hat{x}^T = \hat{x}\hat{x}$ è immediatamente dimostrabile:

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{x}_0 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_0 \cdot \hat{x}_0 \\ \hline \hat{y}_0 \cdot \hat{x}_0 & \hat{z}_0 \cdot \hat{x}_0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{x}_0 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_0 \cdot \hat{x}_0 \\ \hline \hat{y}_0 \cdot \hat{x}_0 & \hat{z}_0 \cdot \hat{x}_0 \end{array} \right] \hat{x}$$

$$A_{BR} A_{BR}^T = I = 0$$

(3)

$$A_{BR}^T A_{BR} = I = I$$

3- ortogonale propria

- ortogonale (punto precedente)
- ortogonale, in quanto le colonne hanno modulo unitario essendo i versori di una terna
- propria, in quanto utilizzando l'angolo le diagonali il determinante è pari ad 1.

1 Bis (utilissimi di \hat{R})

1- cambio di coordinate

$${}^A p = \hat{R} {}^B p$$

$$\dim \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \cdot p \\ \hat{y}_0 \cdot p \\ \hat{z}_0 \cdot p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \cdot p \\ \hat{y}_0 \cdot p \\ \hat{z}_0 \cdot p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0^T \\ \hat{y}_0^T \\ \hat{z}_0^T \end{bmatrix} p = {}^B R^T p = \hat{R} p \quad \text{QED}$$

poiché il prodotto scalare è invariante rispetto ai cambi di riferimento

2- rotazione di vettori e linee

$${}^A p_2 = R_z(\theta) {}^A p_1 \quad (\text{vettore})$$

dim

$$\|a\| = \|b\| = r$$

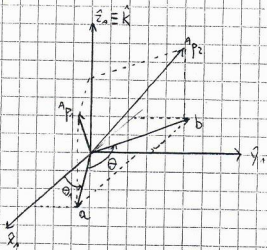
$${}^A p_{2x} = r \cos \theta_1$$

$${}^A p_{2y} = r \sin \theta_1$$

$$\begin{cases} {}^A p_{2x} = r \cos(\theta + \theta_1) \\ {}^A p_{2y} = r \sin(\theta + \theta_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^A p_{2x} = r \cos(\theta + \theta_1) \\ {}^A p_{2y} = r \sin(\theta + \theta_1) \end{cases}$$

$${}^A p_{2z} = {}^A p_{1z}$$



(4)

* espandendo queste due relazioni:

$${}^A p_{2x} = r [\cos \theta \cos \theta_1 - \sin \theta \sin \theta_1] = \cos \theta (r \cos \theta_1) - \sin \theta (r \sin \theta_1)$$

$${}^A p_{2y} = r [\sin \theta \cos \theta_1 + \cos \theta \sin \theta_1] = \sin \theta (r \cos \theta_1) + \cos \theta (r \sin \theta_1)$$

e scrivibile in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} {}^A p_{2x} \\ {}^A p_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \theta_1 \\ r \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A p_{1x} \\ {}^A p_{1y} \end{bmatrix}$$

Aggiungendo la componente lungo \hat{z}_A si ricava:

$${}^A p_2 = \begin{bmatrix} {}^A p_{2x} \\ {}^A p_{2y} \\ {}^A p_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A p_{1x} \\ {}^A p_{1y} \\ {}^A p_{1z} \end{bmatrix} = R_2(\theta) {}^A p_1 \quad \text{QED}$$

$${}^A R = R_2(\theta) \quad (\text{turne})$$

dim.

$${}^A \hat{x}_0 = R_2(\theta) {}^A \hat{x}_1 \quad ; \quad {}^A \hat{y}_0 = R_2(\theta) {}^A \hat{y}_1 \quad ; \quad {}^A \hat{z}_0 = R_2(\theta) {}^A \hat{z}_1$$

$$\text{per definizione } {}^A R = [{}^A \hat{x}_0 \mid {}^A \hat{y}_0 \mid {}^A \hat{z}_0] = [R_2(\theta) {}^A \hat{x}_1 \mid R_2(\theta) {}^A \hat{y}_1 \mid R_2(\theta) {}^A \hat{z}_1]$$

$$\text{evidenziando } R_2(\theta) \text{ si ottiene } {}^A R = R_2(\theta) [{}^A \hat{x}_1 \mid {}^A \hat{y}_1 \mid {}^A \hat{z}_1] = R_2(\theta) \mathbb{I} = R_2(\theta) \quad \text{QED}$$

E' possibile ricavare un'analoga matrice nel caso in cui la rotazione avvenga attorno ad un generico asse \hat{K} .

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} K_x^2 (1 - c\theta) + c\theta & K_x K_y (1 - c\theta) - K_z s\theta & K_z K_x (1 - c\theta) + K_y s\theta \\ K_x K_y (1 - c\theta) + K_z s\theta & K_y^2 (1 - c\theta) + c\theta & K_y K_z (1 - c\theta) - K_x s\theta \\ K_z K_x (1 - c\theta) - K_y s\theta & K_y K_z (1 - c\theta) + K_x s\theta & K_z^2 (1 - c\theta) + c\theta \end{bmatrix}$$

3- composizione delle matrici di rotazione

$${}^A R = {}^A R {}^B R$$

dim.

$${}^B p = {}^B R {}^C p \quad ; \quad {}^A p = {}^A R {}^B p$$

$${}^A p = {}^A R {}^B p = {}^A R {}^B R {}^C p$$

$$\text{essendo } {}^A p = {}^A R {}^C p \text{ si ha } {}^A R {}^C p = {}^A R {}^B R {}^C p \quad \text{QED}$$

INTERPRETAZIONI di ${}^A_B T$

(5)

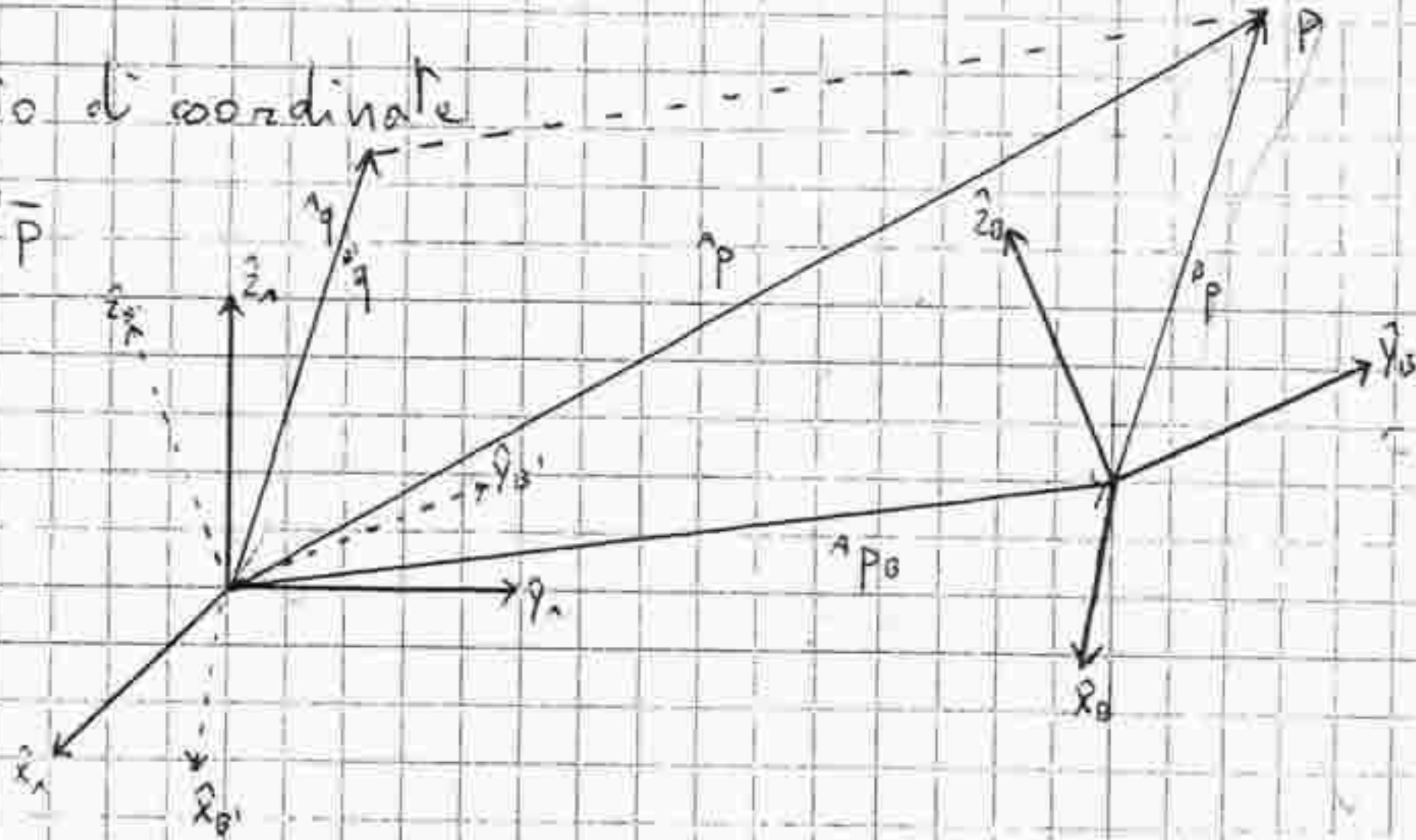
(2)

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & | & {}^A P_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

descrive orientamento e posizione reciproca di due vettori o terne

1- cambio di coordinate

$${}^A \bar{p} = {}^A_B T {}^B p$$



dim.

$${}^A_B T {}^B p = \begin{bmatrix} {}^A_B R & | & {}^A P_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R {}^B p + {}^A P_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A p \\ 1 \end{bmatrix} = {}^A \bar{p}$$

dimostrato di seguito

Si introduce una terna $\{B'\}$ ausiliaria ottenuta per traslazione di $\{B\}$, e il vettore ${}^{B'} q$ ottenuto per traslazione di ${}^B p$. La terna $\{A\}$ e la terna $\{B\}$ sono semplicemente rotate tra loro; si può quindi affermare:

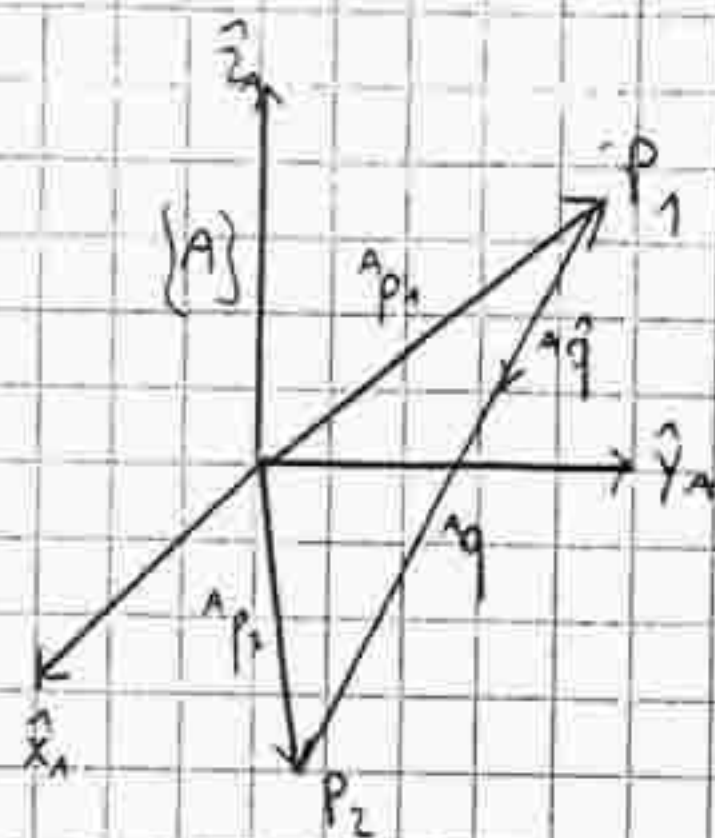
$${}^A q = {}^A_B R {}^{B'} q = {}^A_B R {}^B p$$

La descrizione del punto P rispetto a $\{A\}$ si ricava geometricamente con la regola del parallelogramma:

$${}^A p = {}^A q + {}^A p_0 = {}^A_B R {}^B p + {}^A p_0 = {}^A_B T {}^B p \quad \text{Q.E.D.}$$

2- operatore di traslazione

$$T_p(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & 0 & | & y \\ 0 & 0 & 1 & | & z \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{traslazione di un punto})$$



dim.

(6)

P_1 subisce una trasformazione in P_2 ; direzione e verso di tale trasformazione sono individuati dal vettore ${}^A \vec{q}$, mentre l'ampiezza è pari a d .

Si vuole ricavare un operatore $T_q(d)$ tale che: ${}^A \vec{p}_2 = T_q(d) {}^A \vec{p}_1$.

Per costruzione geometrica si ha ${}^A \vec{p}_2 = {}^A \vec{p}_1 + {}^A \vec{q} = \begin{bmatrix} p_{1x} + q_x \\ p_{1y} + q_y \\ p_{1z} + q_z \end{bmatrix}$ dove ${}^A \vec{q} = d {}^A \hat{q}$.

È ovvio che $T_q(d)$ avrà la forma:

$$T_q(d) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{Q.E.D.}$$

$$T_K(\theta) = \left[\begin{array}{ccc|c} R_K(\theta) & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{rotazione di un vettore}) \quad \ominus$$

${}^A \vec{p}_2 = T_K(\theta) {}^A \vec{p}_1$, dove K indica il vettore ${}^A \vec{K}$ che individua l'asse di rotazione, mentre θ corrisponde all'ampiezza della rotazione.

3 - composizione di matrici di trasformazione omogenea

$${}^A T = {}^A T {}^B T, \dots$$

dim.

Si conoscano ${}^C \vec{p}$, ${}^A T$ e ${}^B T$. Si voglia trovare ${}^A T$ tale che ${}^A \vec{p} = {}^A T {}^C \vec{p}$. \ominus

Si ha che ${}^A \vec{p} = {}^A T {}^B \vec{p} = {}^A T {}^B T {}^C \vec{p}$, dunque è immediato constatare che ${}^A T = {}^A T {}^B T$.

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^A T = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A R & & & {}^A p_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} {}^B R & & & {}^B p_C \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A R {}^B R & & & {}^A R {}^B p_C + {}^A p_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ {}^A T = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A R & & & {}^A p_C \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right.$$

Quindi ${}^A R = {}^A R {}^B R$ e ${}^A p_C = {}^A R {}^B p_C + {}^A p_B$. Q.E.D. \ominus

③

$${}^B A T = ({}^A B T)^{-1}$$

INVERSIONE DI ${}^A B T$

⑦

dim.

Si supponga nota ${}^A B T$ e si voglia ottenere ${}^B A T$.

$${}^B A T ({}^A B T)^{-1} = {}^A A T = \begin{bmatrix} {}^A R & {}^A p_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

Una generica matrice ${}^A B T$ è sempre triangolare superiore a blocchi, e i blocchi lungo la diagonale principale contengono ${}^A R$ ed 1. Quindi, essendo $\det({}^A B T) = \det({}^A R) \cdot 1 = 1$ la matrice ${}^A B T$ è sempre invertibile.

$$\underbrace{{}^A B T^{-1}}_{I_4} \underbrace{{}^A B T}_{I_4} = {}^A B T^{-1} I_4 \Rightarrow {}^B A T = ({}^A B T)^{-1}$$

Per valutare ${}^B A T$ senza fare un'inversione esplicita si può usare la relazione:

$${}^B A T = \begin{bmatrix} {}^B R^T & -{}^B R^T p_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questo è possibile in quanto ${}^B R = ({}^A R)^T$, e per quanto riguarda p_B si ha:

$${}^B A T p_A = {}^B p_B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\text{cioè } \begin{bmatrix} {}^B R & p_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e sviluppando il prodotto si ottiene}$$

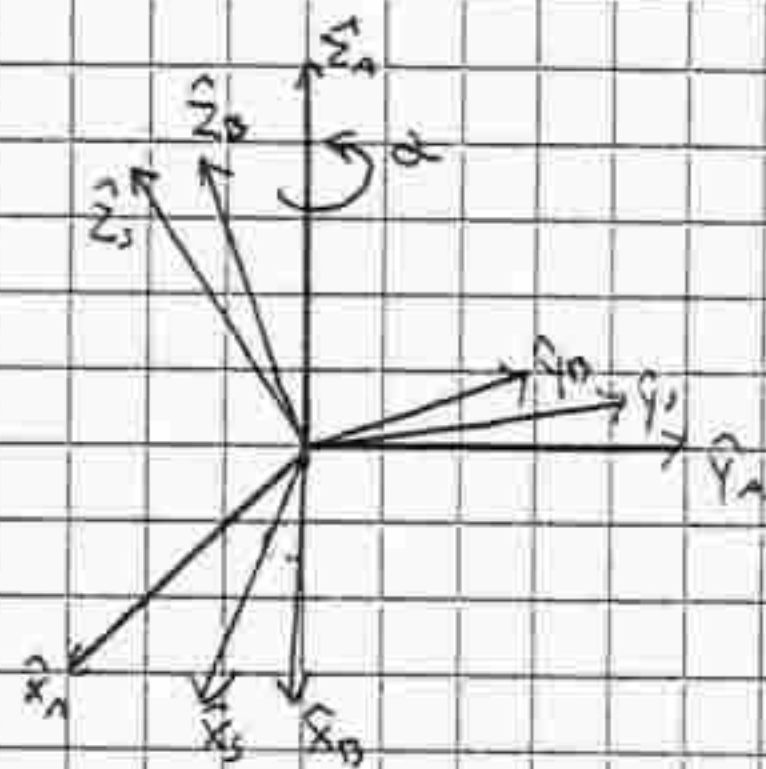
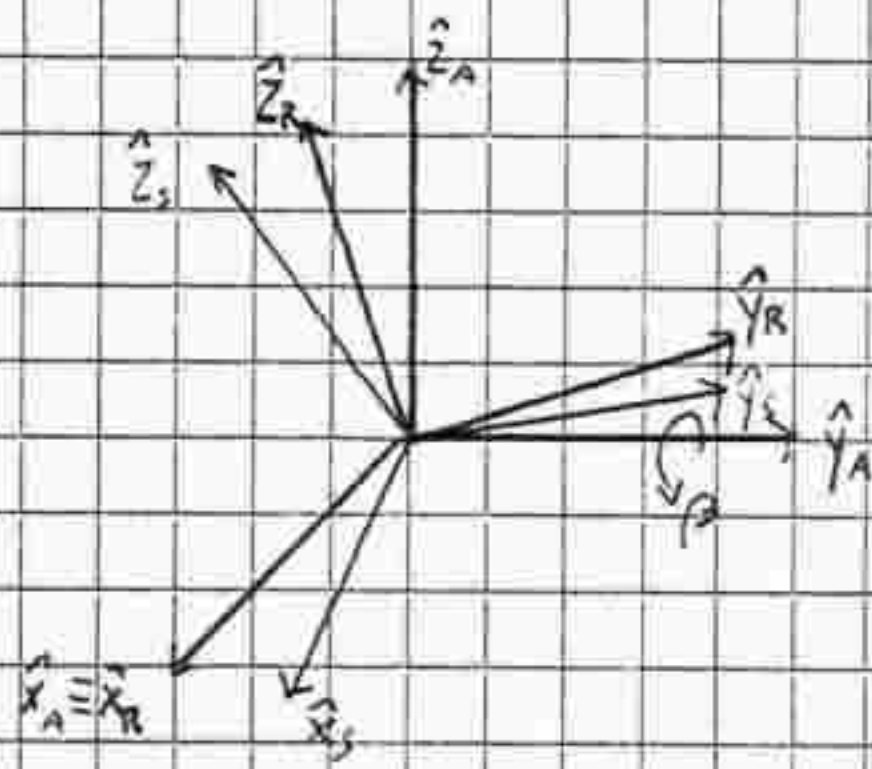
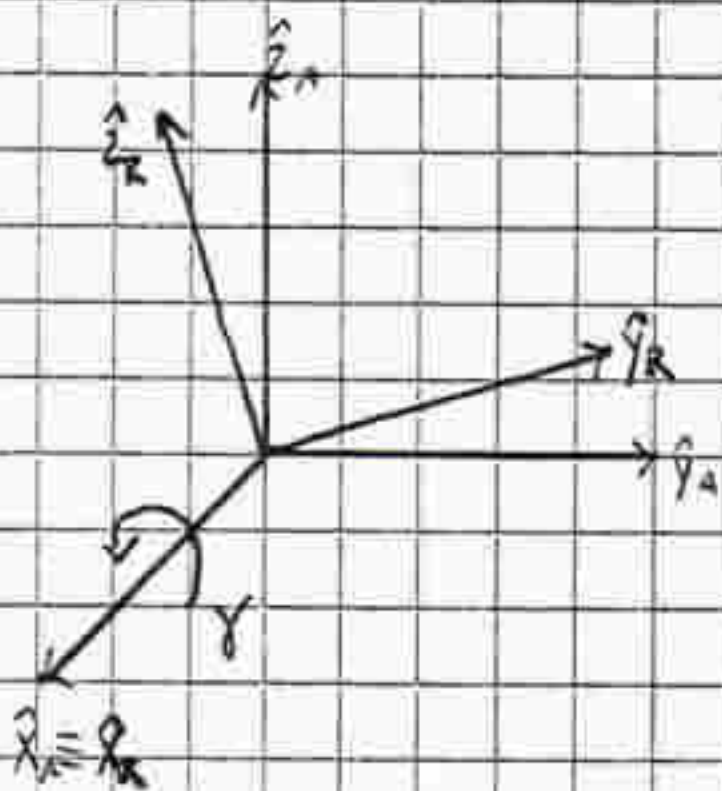
$${}^B R p_A + p_B = 0 \Rightarrow p_A = -{}^B R p_B = -{}^A R^T p_B. \quad \text{QED}$$

(4)

NOTAZIONE PER ASSI FISSI

(8)

$${}^A R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$$



Problema DIRETTO - ricavare ${}^A R$ noti α, β e γ .

${}^A R = R_x(\gamma)$ in quanto rappresenta la rotazione della forma $\{A\}$ attorno all'asse \hat{x} .

Per valutare ${}^A R$ invece si consideri il vettore \hat{x}_s come ottenuto tramite due rotazioni: la prima attorno a \hat{z}_A , la seconda attorno a \hat{y}_A .

$${}^A \hat{x}_R = R_x(\gamma) {}^A \hat{x}_A$$

$${}^A \hat{x}_s = R_y(\beta) {}^A \hat{x}_R = R_y(\beta) R_x(\gamma) {}^A \hat{x}_A = R_y(\beta) R_x(\gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente si ricavano ${}^A \hat{y}_s$ e ${}^A \hat{z}_s$:

$${}^A \hat{y}_s = R_y(\beta) {}^A \hat{y}_R = R_y(\beta) R_x(\gamma) {}^A \hat{y}_A = R_y(\beta) R_x(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^A \hat{z}_s = R_y(\beta) {}^A \hat{z}_R = R_y(\beta) R_x(\gamma) {}^A \hat{z}_A = R_y(\beta) R_x(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ${}^A R$ sarà dunque:

$${}^A R = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^A \hat{x}_s & {}^A \hat{y}_s & {}^A \hat{z}_s \\ | & | & | \end{bmatrix} = R_y(\beta) R_x(\gamma) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_y(\beta) R_x(\gamma)$$

Utilizzando lo stesso procedimento si calcola ${}^A R$ che risulta essere:

$${}^A R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma) \quad \text{QED}$$

~~Il problema inverso:~~

~~La matrice ${}^A R$:~~

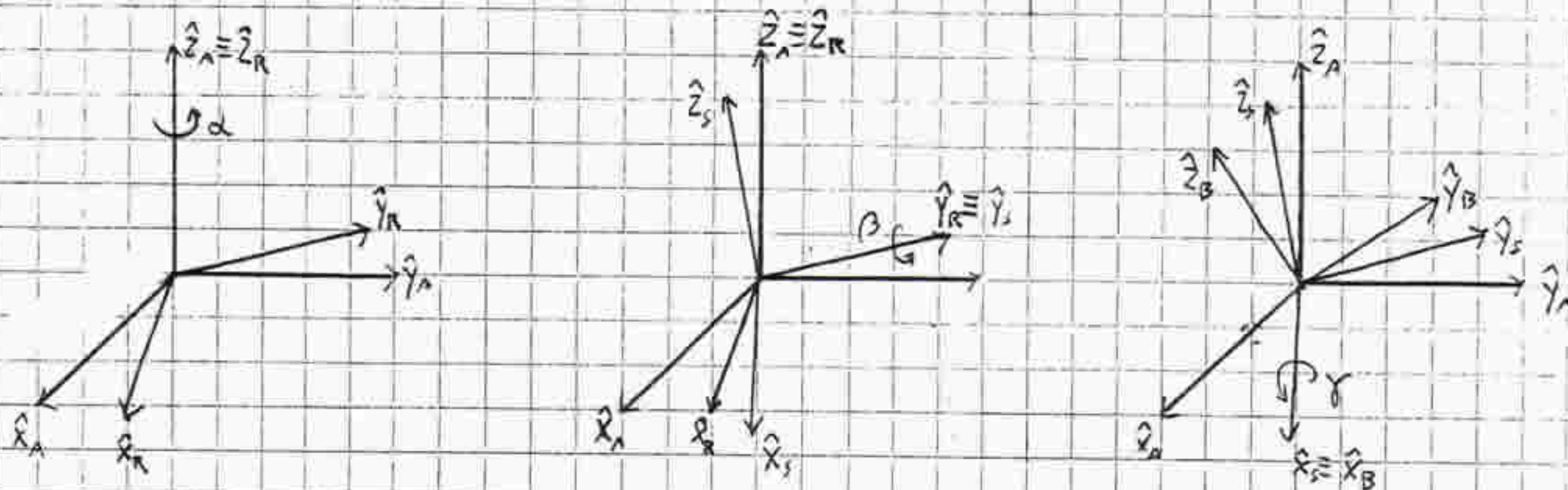
(9)

5

ASSI MOBILI / EULERO

9

$${}^A R_{z'y'x'}(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$$



La prima rotazione avviene attorno all'asse \hat{z} di angolo α : ${}^A R = R_z(\alpha)$

La seconda rotazione avviene attorno al nuovo asse \hat{y}_A di angolo β : ${}^B R = R_{y'}(\beta)$

L'ultima rotazione infine avviene attorno al nuovo asse \hat{x}_B di γ : ${}^C R = R_{x''}(\gamma)$

~~Il pedici sono usati~~ I pedici sono usati per indicare che le rotazioni avvengono attorno

ad assi mobili. In sintesi, ${}^A R_{z'y'x'}(\alpha, \beta, \gamma) = {}^A R {}^B R {}^C R = R_z(\alpha) R_{y'}(\beta) R_{x''}(\gamma)$.

DERIVATA MATRICE DI ROTAZIONE QED

$${}^A \dot{R} = S({}^A \omega_{B,A}) {}^A R$$

Siano $\{A\}$ e $\{B\}$ due terne in rotazione tra loro, e \hat{K} un asse solido ad $\{A\}$ attorno al quale $\{B\}$ ruota con velocità angolare pari a $\dot{\theta}$; il vettore di velocità angolare sia ${}^A \omega_{B,A} = \dot{\theta} \hat{K}$.

In seguito a una rotazione infinitesima di durata Δt e ampiezza $\Delta \theta$ attorno all'asse \hat{K} , la terna $\{B\}$ va a coincidere con $\{B'\}$. Si definiscano $R(t) = {}^A R$ e $R(t + \Delta t) = {}^A R'$; dunque ${}^A \dot{R}$ risulta

$${}^A \dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{{}^A R' - {}^A R}{\Delta \theta}$$

Per ricavare ${}^A \dot{R}$ si ricordi la sua struttura ${}^A R = [{}^A \hat{x}_B | {}^A \hat{y}_B | {}^A \hat{z}_B]$. I vettori che compongono ${}^A R$ possono essere ottenuti dalla rotazione infinitesima attorno a ${}^A \hat{K}$ di vettori di ${}^A R$:

$${}^A \hat{x}_{B'} = R_K(\Delta \theta) {}^A \hat{x}_B \quad ; \quad {}^A \hat{y}_{B'} = R_K(\Delta \theta) {}^A \hat{y}_B \quad ; \quad {}^A \hat{z}_{B'} = R_K(\Delta \theta) {}^A \hat{z}_B$$

$$\text{e pertanto } {}^A R' = R_K(\Delta \theta) [{}^A \hat{x}_B | {}^A \hat{y}_B | {}^A \hat{z}_B] = R_K(\Delta \theta) {}^A R$$

La matrice $R_K(\Delta\theta)$ rappresenta una rotazione infinitesima di $\Delta\theta$ attorno a \mathbf{K} .

Ipotesi $\Delta\theta \rightarrow 0$ si può approssimare $\cos(\Delta\theta) \rightarrow 1$ e $\sin(\Delta\theta) \rightarrow \Delta\theta$:

$$R_K(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -K_z \Delta\theta & K_y \Delta\theta \\ K_z \Delta\theta & 1 & -K_x \Delta\theta \\ -K_y \Delta\theta & K_x \Delta\theta & 1 \end{bmatrix}$$

Tornando al limite si ottiene

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_K(\Delta\theta) \mathbf{R} - \mathbf{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[R_K(\Delta\theta) - \mathbb{I}_3] \mathbf{R}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 0 & -K_z \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & K_y \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ K_z \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & 0 & -K_x \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ -K_y \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & K_x \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -K_z \dot{\theta} & K_y \dot{\theta} \\ K_z \dot{\theta} & 0 & -K_x \dot{\theta} \\ -K_y \dot{\theta} & K_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R} = S(\mathbf{w}_{B,A}) \mathbf{R} \quad \text{dove } S = \text{operatore antisimmetrico}$$

QED

FUNZIONE ATAN 2

$$\textcircled{7} \quad \theta = \text{Atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

un numero complesso può essere rappresentato in una coordinate $(a = x + jy)$ o in forma polare $(a = r e^{j\theta})$. I termini r e θ

sono il modulo e l'argomento di a . È evidente che $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ mentre per θ è stata definita la funzione Atan2 . La seconda espressione serve per correggere il risultato nel caso in cui il punto cada nel secondo o terzo quadrante.

Scelta un qualunque $K \in \mathbb{R}^3$ e definito un nuovo numero $a' = x' + jy' = K_x + j K_y$, si ha

$$\text{Atan2}(y', x') = \text{Atan2}(y, x)$$

Vel caso invece di $K \in \mathbb{R}^3$ si avrà $\text{Atan2}(y', x') = \text{Atan2}(-y, -x)$.

14) La possibilità di ~~scrivere~~ entrambi gli argomenti di Atan2 permette di evidenziare un'altra proprietà.

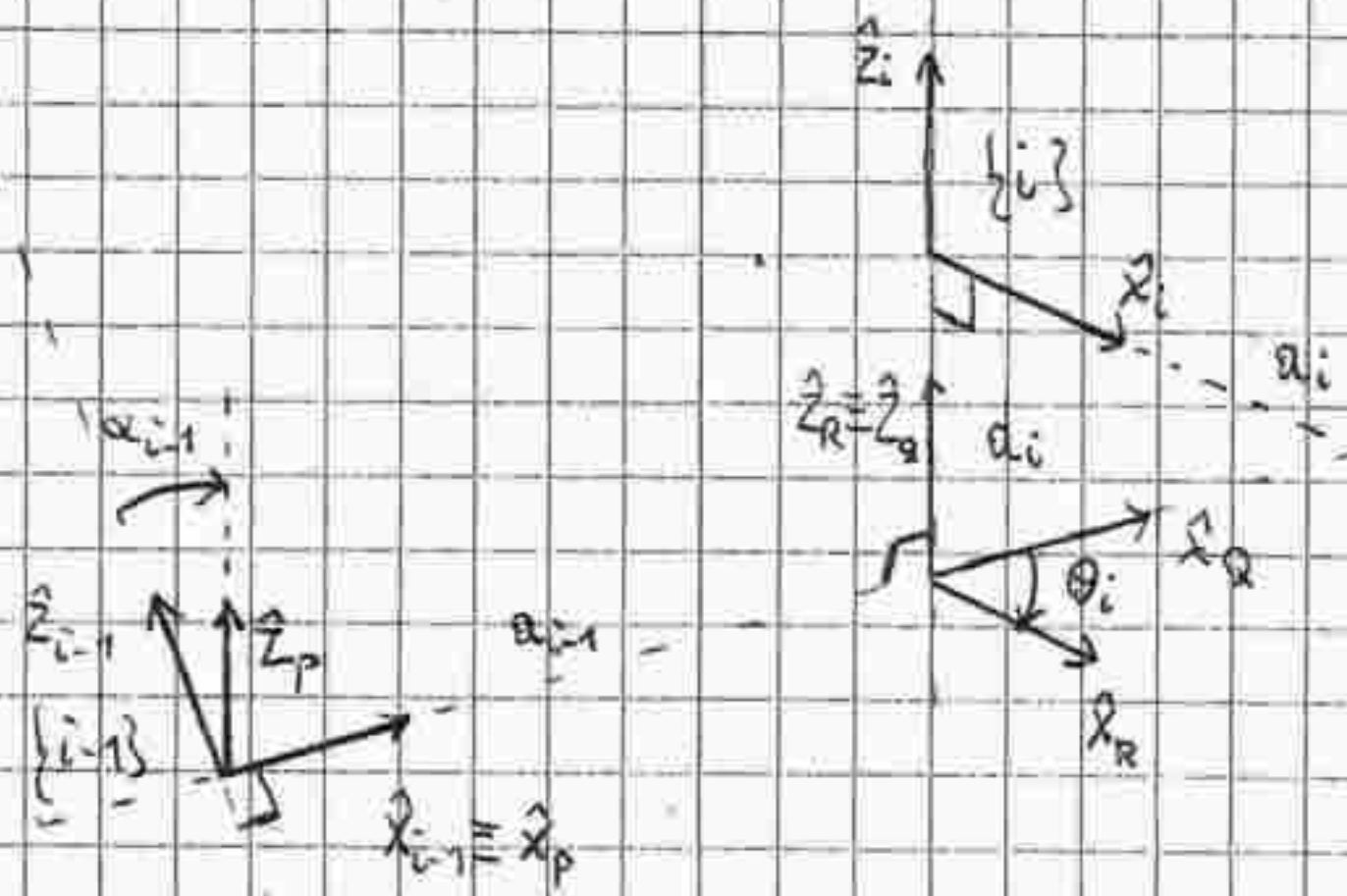
Essendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ si avrà che

$$\theta = \text{Atan2}(y, x) = \text{Atan2}(r \sin \theta, r \cos \theta) = \text{Atan2}(\sin \theta, \cos \theta)$$

Dunque noto seno e coseno di un angolo, Atan2 restituisce il valore esatto dell'angolo stesso.

2) ${}^{i-1}T_i(q_i)$

FORMA DI CRAIG-KHABIL



Le terne $\{i-1\}$ e $\{i\}$ sono state fissate seguendo la convenzione di Denavit-Hartenberg modificata; inoltre si introducono tre terne ausiliarie $\{P\}$, $\{Q\}$ ed $\{R\}$ per poter ricavare ${}^{i-1}T_i(q_i)$.

Laterna $\{P\}$ è ottenuta ruotando la terna $\{i-1\}$ di un angolo α_{i-1} attorno ad x_{i-1} :

$${}^P T = T_z(\alpha_{i-1}) = \left[\begin{array}{ccc|c} R_z(\alpha_{i-1}) & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La terna $\{Q\}$ è ottenuta traslando la terna $\{P\}$ di a_{i-1} lungo l'asse x_{i-1} :

$${}^P T = T_x(a_{i-1}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La terna $\{R\}$ è ottenuta ruotando la terna $\{Q\}$ di un angolo θ_i attorno a z_i :

$${}^Q T = T_z(\theta_i) = \left[\begin{array}{ccc|c} R_z(\theta_i) & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Infiere la Terra $\{i\}$ è ottenuta traslando la Terra $\{R\}$ di d_i lungo \hat{z}_R : (12)

$${}^R T = T_z(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ${}^i T(q_i)$ si ottiene attraverso la composizione delle quattro matrici:

$${}^i T(q_i) = {}^{i-1} P T \quad {}^R T \quad {}^R Q T \quad {}^R T = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(9)

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c$$

Si introduce la trasformazione

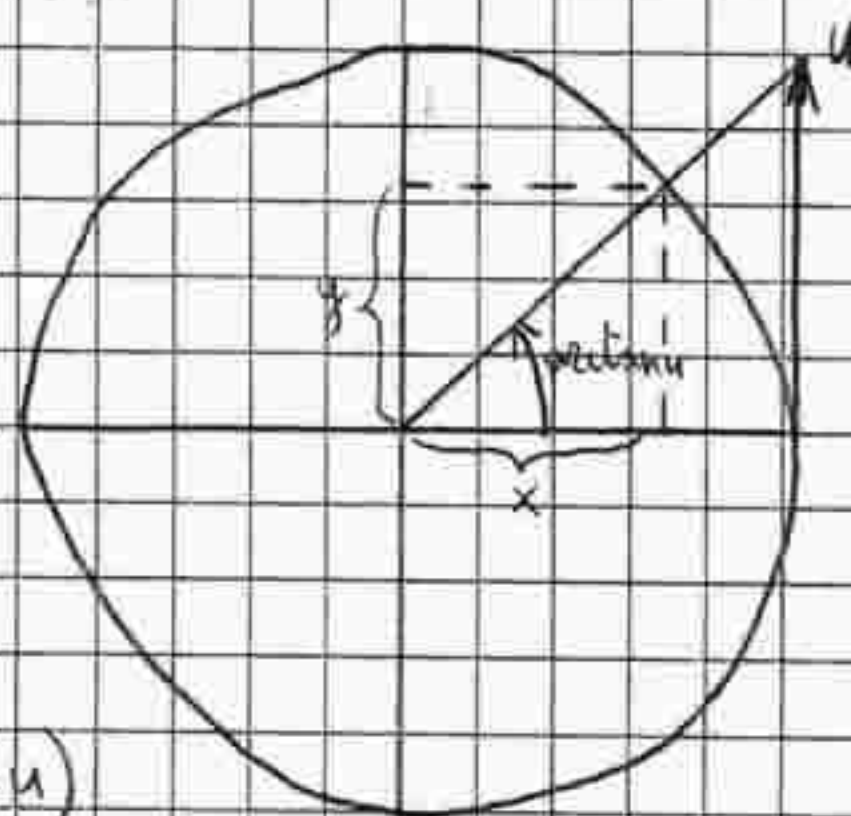
$$u(\theta): (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = u$$

quindi $\theta = 2 \arctan u$.

Scriviamo $\cos \theta$ e $\sin \theta$ in funzione di u :

$$\cos \theta = \cos(2 \arctan u) = \cos^2(\arctan u) - \sin^2(\arctan u)$$

$$\sin \theta = \sin(2 \arctan u) = 2 \cos(\arctan u) \sin(\arctan u)$$



$$x = \cos(\arctan u)$$

$$y = \sin(\arctan u)$$

Ragionando sui triangoli simili si ottiene:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \quad ; \quad \frac{y}{1} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

quindi sostituendo:

$$\cos \theta = \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin \theta = 2 \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{u}{1+u^2} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\text{da cui si ha: } a \frac{1-u^2}{1+u^2} + b \frac{2u}{1+u^2} = c \implies a - au^2 + 2bu = c + u^2$$

$$u^2(c+a) - 2bu + c - a = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (c^2 - a^2)}}{c+a}$$

$$\text{da cui si ricava } \theta = 2 \arctan \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 - (c^2 - a^2)}}{c+a} \right) \quad \text{QED}$$

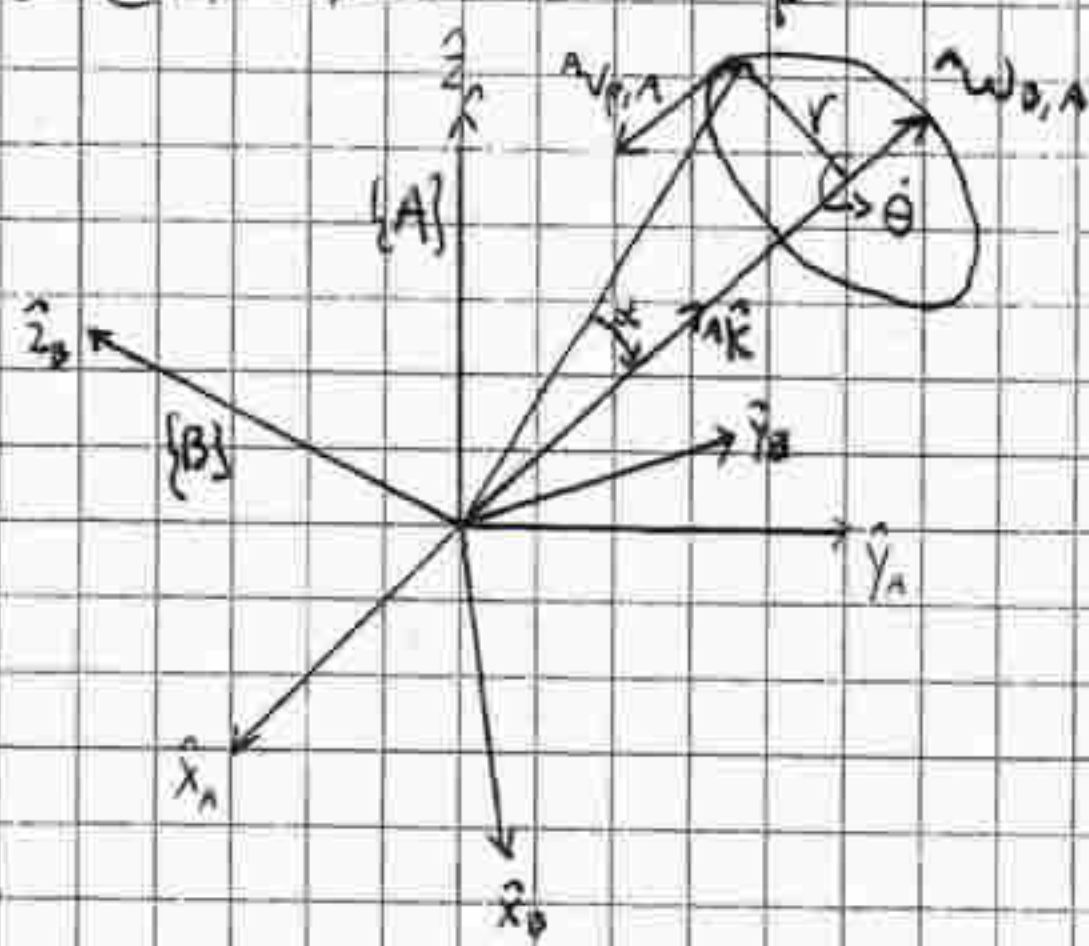
10

$$\|{}^A v_{p,A}\| = \dot{\theta} r$$

VELOCITÀ LINEARI, $\dot{\theta}$ ANGOLI

13

dim.



Si supponga che la terra {B} ruoti attorno ad {A}; l'asse di rotazione sia individuato da K , solido le ad {A}; si consideri un punto P solido le con {B}. Ovviamente ${}^B p$ è costante e ${}^B v_{p,B} = \dot{p} = 0$.

Al contrario, ${}^A p$ non è costante: si vuole valutare ${}^A v_{p,A}$.

$${}^A v_{p,A} = \dot{p} = \frac{d}{dt} ({}^A R^B p) = \dot{R}^B p + {}^A R^B \dot{p} \rightarrow \dot{R}^B p$$

Ricordando il risultato che riguarda la derivata di una matrice di rotazione, e che $\dot{p} = 0$ si ha:

$${}^A v_{p,A} = \left(S({}^A \omega_{B,A}) \right) {}^A R^B p = {}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B p$$

Ricordando che ${}^A R^B p = r$ e la definizione di prodotto vettoriale si ha:

$$\|{}^A v_{p,A}\| = \|{}^A \omega_{B,A}\| \|r\| \sin \alpha \quad \text{dove } \alpha \text{ è l'angolo fra i due vettori}$$

Essendo $\|{}^A \omega_{B,A}\| = \dot{\theta}$ e notando che $\|r\| \sin \alpha$ è il raggio r della circonferenza

tracciata dal punto in movimento, si arriva:

$$\|{}^A v_{p,A}\| = \dot{\theta} r$$

Q.E.D.

COMPOSIZIONE di velocità LINEARI

Si consideri una terra {C} che si muove di moto rototraslatorio rispetto ad una terra {B}; tale moto è descritto da ${}^B v_{c,B}$ e ${}^B \omega_{c,B}$, rispettivamente velocità lineare e angolare di {C} rispetto a {B}. La terra {B} stessa sia in movimento rispetto ad una terra {A}, movimento descritto da ${}^A v_{B,A}$ e ${}^A \omega_{B,A}$. Si voglia valutare la velocità lineare di {C} rispetto ad {A}, descritta da ${}^A v_{c,A}$.

$$\begin{bmatrix} p_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R | A p_B \\ 0 | 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

si ricava immediatamente: ${}^A p_c = {}^A R^B p_c + {}^A p_B$

Dunque ${}^A v_{c,A} = \dot{{}^A p_c} = \dot{{}^A R^B p_c} + \dot{{}^A R^B} p_c + \dot{{}^A p_B} = S({}^A \omega_{B,A}) {}^A R^B p_c + {}^A R^B v_{c,B} + {}^A v_{B,A}$
 $= {}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B p_c + {}^A R^B v_{c,B} + {}^A v_{B,A}$

Il primo termine corrisponde ad una componente dovuta alla rotazione tra $\{B\}$ ed $\{A\}$.
 Il secondo termine è dovuto alla velocità relativa tra $\{C\}$ ed $\{B\}$; il vettore $v_{c,B}$ è descritto rispetto ad $\{A\}$ tramite ${}^A R$.
 Il terzo termine è la velocità lineare tra $\{B\}$ ed $\{A\}$.

COMPOSIZIONE di velocità ANGOLARI

Si introduce un punto D solidale con $\{C\}$ e descritto da ${}^C p_D$

$${}^A \bar{p}_D = {}^A T^C \bar{p}_D \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^A p_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & | & {}^A p_C \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^C p_D \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^A p_D = {}^A R {}^C p_D + {}^A p_C$$

Derivando e ricordando che ${}^C p_D$ è costante si ottiene:

$$\dot{{}^A p}_D = \dot{{}^A R} {}^C p_D + \dot{{}^A p}_C = S({}^A \omega_{C,A}) {}^A R {}^C p_D + {}^A v_{C,A} = {}^A \omega_{C,A} \times {}^A R {}^C p_D + {}^A v_{C,A} \quad (1)$$

Si calcoli nuovamente ${}^A p_D$ sfruttando la composizione di matrici di Trasformazione omogenea:

$${}^A \bar{p}_D = {}^A T^B T^C \bar{p}_D \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^A p_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & | & {}^A p_B \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B R & | & {}^B p_C \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^C p_D \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} {}^A p_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & | & {}^A p_B \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B R {}^C p_D + {}^B p_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A p_C = {}^A R^B p_C + {}^A p_B$$

Sviluppando il prodotto si ha: ${}^A p_D = {}^A R^B R^C p_D + {}^A R^B p_C + {}^A p_B = {}^A R^B R^C p_D + {}^A p_C$

Derivando: ${}^A \dot{p}_D = \dot{{}^A R}^B R^C p_D + {}^A R^B \dot{R}^C p_D + \dot{{}^A p}_C = S({}^A \omega_{B,A}) {}^A R^B R^C p_D + {}^A R^B S({}^B \omega_{C,B}) R^C p_D + {}^A v_{C,A} =$
 $= {}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B R^C p_D + {}^A R^B ({}^B \omega_{C,B} \times R^C p_D) + {}^A v_{C,A}$

Essendo ${}^A R$ ortogonale propria si può sfruttare la proprietà distributiva tra il prodotto matriciale e il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} {}^A \dot{p}_D &= {}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B R^C p_D + ({}^A R^B \omega_{C,B}) \times (R^C p_D) + {}^A v_{C,A} = \\ &= {}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B R^C p_D + {}^A R^B \omega_{C,B} \times R^C p_D + {}^A v_{C,A} = \\ &= ({}^A \omega_{B,A} + {}^A R^B \omega_{C,B}) \times {}^A R^C p_D + {}^A v_{C,A} \quad (2) \end{aligned}$$

Dal confronto tra (1) e (2) si deduce che ${}^A \omega_{C,A} = {}^A \omega_{B,A} + {}^B R^B \omega_{C,B}$. (15)

La velocità angolare complessiva è data dalla somma delle velocità angolari relative, naturalmente descritte rispetto allo stesso sistema di riferimento.

(10B15) (accelerazioni lineari e angolari)

Si definisce il vettore di accelerazione lineare del punto P rispetto alla terna {A}, descritto rispetto alla terna {A}, come:

$${}^A a_{P,A} = {}^A \dot{v}_{P,A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta {}^A v_{P,A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A v_{P,A}(t+\Delta t) - {}^A v_{P,A}(t)}{\Delta t}$$

Allo stesso modo si definisce il vettore di accelerazione angolare della terna {B} rispetto alla terna {A}, descritto rispetto alla terna {A}, come:

$${}^A \alpha_{B,A} = {}^A \dot{\omega}_{B,A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta {}^A \omega_{B,A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A \omega_{B,A}(t+\Delta t) - {}^A \omega_{B,A}(t)}{\Delta t}$$

COMPOSIZIONE di accelerazioni LINEARI ${}^A v_{C,A} = {}^A \omega_{B,A} \times {}^B R^B p_c + {}^A R^B v_{c,B} + v_{B,A}$

Si consideri nuovamente una terna {C} che si muove di moto rototranslatorio rispetto ad una terna {B}, la quale a sua volta si muove attorno ad {A}. Supponendo note velocità e accelerazioni relative tra {B} ed {A} e tra {C} e {B}, si voglia valutare l'accelerazione lineare complessiva tra {C} e {A}.

$$\begin{aligned} {}^A a_{C,A} &= {}^A \dot{v}_{C,A} = {}^A \omega_{B,A} \times {}^B R^B p_c + {}^A \dot{\omega}_{B,A} \times {}^B R^B p_c + {}^A \omega_{B,A} \times {}^B \dot{R}^B p_c + {}^B \dot{R}^B v_{c,B} + \\ &+ {}^B R^B \dot{v}_{c,B} + {}^A \dot{v}_{B,A} = {}^A \alpha_{B,A} \times {}^B R^B p_c + {}^A \omega_{B,A} \times S({}^A \omega_{B,A}) {}^B R^B p_c + \\ &+ {}^A \omega_{B,A} \times {}^B \dot{R}^B v_{c,B} + S({}^A \omega_{B,A}) {}^B R^B v_{c,B} + {}^B R^B a_{c,B} + {}^A a_{B,A} = \\ &= {}^A \alpha_{B,A} \times {}^B R^B p_c + {}^A \omega_{B,A} \times ({}^A \omega_{B,A} \times {}^B R^B p_c) + {}^A \omega_{B,A} \times {}^B \dot{R}^B v_{c,B} + {}^A \omega_{B,A} \times {}^B R^B v_{c,B} + \\ &+ {}^B R^B a_{c,B} + {}^A a_{B,A} = \\ &= \underbrace{{}^A \alpha_{B,A} \times {}^B R^B p_c}_{(1)} + \underbrace{{}^A \omega_{B,A} \times ({}^A \omega_{B,A} \times {}^B R^B p_c)}_{(2)} + \underbrace{2 {}^A \omega_{B,A} \times {}^B \dot{R}^B v_{c,B}}_{(3)} + \underbrace{{}^B R^B a_{c,B}}_{(4)} + \underbrace{{}^A a_{B,A}}_{(5)} \end{aligned}$$

(1) accelerazione tangenziale dovuta all'accelerazione angolare di {B} rispetto ad {A}

(2) accelerazione centripeta

(3) accelerazione di Coriolis

(4) accelerazione lineare dell'origine di {C} rispetto a {B}

(5) accelerazione lineare dell'origine di {B} rispetto ad {A}

COMPOSIZIONE di accelerazioni ANGOLARI
$${}^A \omega_{C,A} = {}^A \omega_{B,A} + {}^A R^B {}^B \omega_{C,B}$$

Analogamente a quanto fatto per le accelerazioni lineari, è possibile valutare l'espressione relativa alla composizione di accelerazioni angolari:

$${}^A \alpha_{C,A} = {}^A \dot{\omega}_{C,A} = {}^A \dot{\omega}_{B,A} + \frac{d}{dt} ({}^A R^B) {}^B \omega_{C,B} + {}^A R^B \dot{\omega}_{C,B} = {}^A \alpha_{B,A} + S({}^A \omega_{B,A}) {}^A R^B \omega_{C,B} + {}^A R^B \alpha_{C,B} = {}^A \alpha_{B,A} + {}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B \omega_{C,B} + {}^A R^B \alpha_{C,B}$$

11 SALVIANO GEOMETRICO

Si voglia calcolare la velocità generalizzata della Terra {N}, descritta rispetto alla Terra {0}, di un manipolatore fornito di N giunti, supponendo che possa essere usata come:

$$\bar{v}_N = \begin{bmatrix} v_N \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v1}(q) & J_{v2}(q) & \dots & J_{vN}(q) \\ J_{\omega1}(q) & J_{\omega2}(q) & \dots & J_{\omega N}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} = J_g(q) \cdot \dot{q}$$

Nota: \dot{q} è il vettore delle derivate prime delle variabili di giunto.

La componente $J_{vi}(q) \dot{q}_i$ rappresenta la componente di v_N dovuta alla i -esima velocità di giunto; l'elemento $J_{\omega i}(q) \dot{q}_i$ rappresenta la componente di ω_N dovuta alla i -esima velocità di giunto.

È possibile dimostrare che:

$$J_{vi}(q) = \begin{cases} {}^0 \dot{z}_i(q) & \text{giunto prismatico} \\ {}^0 \dot{z}_i(q) \times [{}^0 p_{Nv}(q) - {}^0 p_i(q)] & \text{giunto rotazionale} \end{cases}$$

$$J_{\omega i}(q) = \begin{cases} 0 & \text{giunto prismatico} \\ {}^0 \dot{z}_i(q) & \text{giunto rotazionale} \end{cases}$$

Il termine ${}^0 \dot{z}_i$ rappresenta il vettore \dot{z}_i descritto rispetto a {0}, mentre ${}^0 p_i$ e ${}^0 p_{Nv}$ rappresentano l'origine delle Terre {i} e {N} rispetto a {0}.

Questi termini si ricavano direttamente dalla matrice di trasformazione omogenea ${}^0T_i(q)$, ricordando che ha la forma seguente (18)

$${}^0T_i(q) = \begin{bmatrix} {}^0R_i(q) & | & {}^0P_i(q) \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_i(q) & | & {}^0y_i(q) & | & {}^0z_i(q) \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

CAMBI DI RIFERIMENTO dello Jacobiano geometrico

Si supponga che \bar{v}_N sia descritto rispetto a due terne $\{A\}$ e $\{B\}$ e che in entrambi i casi esistano degli jacobiani geometrici tali che:

$${}^A\bar{v}_N = {}^A J_g(q) \dot{q} \quad ; \quad {}^B\bar{v}_N = {}^B J_g(q) \dot{q}$$

Allora avviene:

$${}^A J_g(q) = \begin{bmatrix} {}^A R(q) & | & 0 \\ \hline 0 & | & {}^A R(q) \end{bmatrix} {}^B J_g(q)$$

dim.

Essendo le velocità vettoriali libere si ha che ${}^A v_N = {}^A R {}^B v_N$ e ${}^A w_N = {}^A R {}^B w_N$

Si può allora scrivere:

$${}^A \bar{v}_N = \begin{bmatrix} {}^A v_N \\ {}^A w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R {}^B v_N \\ {}^A R {}^B w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R(q) & | & 0 \\ \hline 0 & | & {}^A R(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B v_N \\ {}^B w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R(q) & | & 0 \\ \hline 0 & | & {}^A R(q) \end{bmatrix} {}^B \bar{v}_N$$

Infine dalla definizione precedente di ${}^A \bar{v}_N$ e ${}^B \bar{v}_N$ si ricava:

$${}^A J_g(q) \dot{q} = \begin{bmatrix} {}^A R(q) & | & 0 \\ \hline 0 & | & {}^A R(q) \end{bmatrix} {}^B J_g(q) \dot{q} \quad \text{QED}$$

JACOBIANO ANALITICO

Un punto nello spazio operativo è definito come $x = \begin{bmatrix} p \\ \theta \end{bmatrix} \in X \subset \mathbb{R}^6$ dove le prime tre componenti rappresentano la posizione dell'origine dell'ultima terna del manipolatore descritta rispetto a $\{0\}$, mentre le ultime tre componenti rappresentano il suo orientamento espresso in una qualsiasi forma minima.

Il vettore x dipende dalle variabili di giunto, dunque è lecito scrivere:

$$\bar{x}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} P_x(\bar{q}) \\ P_y(\bar{q}) \\ P_z(\bar{q}) \\ \alpha(\bar{q}) \\ \beta(\bar{q}) \\ \gamma(\bar{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x(q_1, q_2, \dots, q_n)(t) \\ P_y(q_1, q_2, \dots, q_n)(t) \\ P_z(q_1, q_2, \dots, q_n)(t) \\ \alpha(q_1, q_2, \dots, q_n)(t) \\ \beta(q_1, q_2, \dots, q_n)(t) \\ \gamma(q_1, q_2, \dots, q_n)(t) \end{bmatrix}$$

Derivando $\bar{x}(\bar{q})$ rispetto al tempo:

$$\dot{\bar{x}}(\dot{\bar{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{dP_x}{dq_1} \dot{q}_1 + \frac{dP_x}{dq_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{dP_x}{dq_n} \dot{q}_n \\ \frac{dP_y}{dq_1} \dot{q}_1 + \frac{dP_y}{dq_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{dP_y}{dq_n} \dot{q}_n \\ \frac{dP_z}{dq_1} \dot{q}_1 + \frac{dP_z}{dq_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{dP_z}{dq_n} \dot{q}_n \\ \frac{d\alpha}{dq_1} \dot{q}_1 + \frac{d\alpha}{dq_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{d\alpha}{dq_n} \dot{q}_n \\ \frac{d\beta}{dq_1} \dot{q}_1 + \frac{d\beta}{dq_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{d\beta}{dq_n} \dot{q}_n \\ \frac{d\gamma}{dq_1} \dot{q}_1 + \frac{d\gamma}{dq_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{d\gamma}{dq_n} \dot{q}_n \end{bmatrix} = J_{\bar{x}}(\bar{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J_{\bar{x}}(\bar{q}) \dot{\bar{q}}$$

Lo jacobiano analitico fornisce un legame tra le derivate prime delle variabili di giunto e le derivate prime delle variabili dello spazio operativo:

$$\dot{\bar{x}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = J_{\bar{x}}(\bar{q}) \dot{\bar{q}}$$

CONFRONTO

Confrontando la composizione dei vettori \dot{x} e \bar{v}_N si nota che i primi tre elementi di \dot{x} sono costituiti dalle coordinate dell'origine di $\{N\}$ rispetto a $\{O\}$, cioè del vettore p_N . Di conseguenza, $\dot{p}_N = \dot{v}_N = v_N$ e quindi i primi tre elementi di \dot{x} coincidono con i primi tre di \bar{v}_N .

Gli ultimi tre elementi di \dot{x} sono la derivata prima delle variabili della rotazione minima adottata per rappresentare l'orientamento di $\{N\}$; normalmente non coincidono con gli ultimi tre elementi di \bar{v}_N che sono invece la velocità angolare di $\{N\}$.

Per tanto lo jacobiano analitico risulta generalmente differente dallo jacobiano geometrico; è possibile tuttavia trovare delle relazioni tra i due. In particolare, se fosse possibile ricavare una matrice di trasformazione $N(\Phi)$ tale che $w_N = N(\Phi) \dot{\Phi}$, ricordando che $v_N = \dot{p} = \Pi_3 \dot{p}$ si potrebbe scrivere

$$\bar{v}_N = \begin{bmatrix} v_N \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_3 \dot{p} \\ N(\Phi) \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_3 & | & 0 \\ 0 & | & N(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \tilde{N}(\Phi) \dot{x}(q, \dot{q})$$

e ricordando che $\dot{x}(q, \dot{q}) = J_a(q) \dot{q}$ e $\bar{v}_N(q, \dot{q}) = J_g(q) \dot{q}$ si può

concludere che

$$J_g = \tilde{N}(\Phi) J_a$$

Per ricavare la matrice $\tilde{N}(\Phi)$ usare il seguente procedimento.

È noto che $S(\omega_{B/A}) = {}^A R \dot{\theta} R^T$. Scrivendo i termini in forma esplicita si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \dot{v}_{12} & \dot{v}_{13} \\ v_{21} & \dot{v}_{22} & \dot{v}_{23} \\ v_{31} & \dot{v}_{32} & \dot{v}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{33} & v_{33} \end{bmatrix}$$

e si verifica che:

$${}^A \omega_{B/A} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{21} \dot{v}_{31} + v_{22} \dot{v}_{32} + v_{23} \dot{v}_{33} \\ v_{31} \dot{v}_{11} + v_{32} \dot{v}_{12} + v_{33} \dot{v}_{13} \\ v_{11} \dot{v}_{21} + v_{12} \dot{v}_{22} + v_{13} \dot{v}_{23} \end{bmatrix} \quad (*)$$

Considerando ora la terna $\{0\}$ coincidente con $\{A\}$, e la terna $\{N\}$ coincidente con $\{B\}$, è possibile calcolare w_N a partire da ${}^0R(\Phi)$ e ${}^0R(\dot{\Phi})$. Infine, gli elementi di $N(\Phi)$ possono essere ricavati confrontando quelli con quelli della matrice $(*)$ sapendo che vale la relazione

$$w_N = N\Phi \cdot \dot{\Phi}$$

Conoscendo l'espressione di ${}^0R(\Phi)$ è sempre possibile ricavare $N(\Phi)$ e quindi nel caso sia noto lo jacobiano analitico sarà sempre possibile ricavare lo jacobiano geometrico.

Perché sia vero l'inverso è necessario che $\tilde{N}(\Phi)$ sia invertibile, dunque che $N(\Phi)$ sia invertibile ($\det(N(\Phi)) = 1$)

10 TRIS (forme ricorsive per velocità e accelerazioni)

Si considerino note le velocità lineari ed angolari della terna $\{i\}$ di un manipolatore ovvero siano note ${}^i v_i$ e ${}^i w_i$; è possibile calcolare le velocità relative alla terna $\{i+1\}$, ovvero ${}^{i+1} v_{i+1}$ e ${}^{i+1} w_{i+1}$, attraverso le seguenti relazioni:

$${}^{i+1} w_{i+1} = {}^{i+1}R {}^i w_i + \dot{\Theta}_{i+1} {}^{i+1} z_{i+1}$$

$${}^{i+1} v_{i+1} = {}^{i+1}R ({}^i v_i + {}^i w_i \times {}^i p_{i+1}) + d_{i+1} \dot{\Theta}_{i+1} {}^{i+1} z_{i+1}$$

in cui i termini ${}^{i+1}R = {}^iR^T$ e ${}^i p_{i+1}$ sono ricavabili dalla ${}^i T_{i+1}$:

$${}^i T_{i+1} = \begin{bmatrix} {}^iR & | & {}^i p_{i+1} \\ \hline 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

e ovviamente ${}^{i+1} z_{i+1} = [0 \ 0 \ 1]^T$. I termini $\dot{\Theta}_{i+1}$ e d_{i+1} rappresentano le derivate prime delle variabili di giunto. In modo analogo si ricavano:

$${}^{i+1} a_{i+1} = {}^{i+1}R {}^i a_i + {}^{i+1}R {}^i w_i \times \dot{\Theta}_{i+1} {}^{i+1} z_{i+1} + \ddot{\Theta}_{i+1} {}^{i+1} z_{i+1}$$

$${}^{i+1} \dot{a}_{i+1} = {}^{i+1}R \left[{}^i \dot{a}_i + {}^i \dot{a}_i \times {}^i p_{i+1} + {}^i w_i \times ({}^i w_i \times {}^i p_{i+1}) \right] + 2 \dot{w}_{i+1} \times d_{i+1} {}^{i+1} z_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1} z_{i+1}$$

dim.

$${}^A W_{C,A} = {}^A W_{B,A} + {}^A R^B W_{C,B} \xrightarrow{A=0, B=i, C=i+1} {}^0 W_{i+1,0} = {}^0 W_{i,0} + {}^i R^i W_{i+1,i}$$

essendo la velocità angolare un vettore libero, può essere espresso rispetto a terre differenti mediante le matrici di rotazione, pertanto:

$$\begin{aligned} {}^{i+1} W_{i+1,i} &= {}^{i+1} W_{i+1,0} = {}^{i+1} R^0 W_{i+1,0} = {}^{i+1} R^0 ({}^0 W_{i,0} + {}^i R^i W_{i+1,i}) = \\ &= {}^{i+1} R^0 W_{i,0} + {}^{i+1} R^0 {}^i R^i W_{i+1,i} = {}^{i+1} R^0 ({}^i R^i W_{i,0}) + {}^{i+1} R^0 {}^i R^i W_{i+1,i} = \\ &= {}^{i+1} R^i W_{i,0} + {}^{i+1} W_{i+1,i} = {}^{i+1} R^i W_i + {}^{i+1} W_{i+1,i} \end{aligned}$$

Se il giunto tra i e $i+1$ è rotabile, la rotazione avviene attorno a \hat{z}_{i+1} ; il modulo di ${}^{i+1} W_{i+1,i}$ sarà pari alla derivata prima di θ_{i+1} :

$${}^{i+1} W_{i+1,i} = \dot{\theta}_{i+1} \hat{z}_{i+1}$$

Dunque si avrà:

$${}^{i+1} W_{i+1} = {}^{i+1} R^i W_i + \dot{\theta}_{i+1} \hat{z}_{i+1} \quad \text{QED}$$

La dimostrazione della velocità lineare è svolta in modo simile:

$${}^A V_{C,A} = {}^A W_{B,A} \times {}^A R^B p_C + {}^A R^B V_{C,B} + {}^A V_{B,A} \xrightarrow{A=0, B=i, C=i+1} {}^0 V_{i+1,0} = {}^0 W_{i,0} \times {}^i R^i p_{i+1} + {}^i R^i V_{i+1,i} + {}^0 V_{i,0}$$

$$\begin{aligned} {}^{i+1} V_{i+1} &= {}^{i+1} R^0 V_{i+1} = {}^{i+1} R^0 V_{i+1,0} = {}^{i+1} R^0 ({}^0 W_{i,0} \times {}^i R^i p_{i+1} + {}^i R^i V_{i+1,i} + {}^0 V_{i,0}) = \\ &= {}^{i+1} R^0 {}^i R^i ({}^0 W_{i,0} \times {}^i R^i p_{i+1}) + {}^{i+1} R^0 {}^i R^i V_{i+1,i} + {}^{i+1} R^0 {}^0 V_{i,0} = \\ &= {}^{i+1} R^i ({}^i R^0 W_{i,0} \times {}^i R^0 R^i p_{i+1}) + {}^{i+1} R^i V_{i+1,i} + {}^{i+1} R^i V_{i,0} = \end{aligned}$$

$$= {}^{i+1} R^i ({}^i V_{i,0} + {}^i W_i \times {}^i p_{i+1}) + {}^{i+1} R^i V_{i+1,i} = {}^{i+1} R^i ({}^i V_i + {}^i W_i \times {}^i p_{i+1}) + {}^{i+1} V_{i+1,i}$$

Se il giunto tra i e $i+1$ è prismatico, la traslazione avviene lungo \hat{z}_{i+1} ; il modulo di ${}^{i+1} V_{i+1,i}$ sarà pari alla derivata prima di d_{i+1} :

$${}^{i+1} V_{i+1,i} = \dot{d}_{i+1} \hat{z}_{i+1}$$

Dunque si avrà:

$${}^{i+1} V_{i+1} = {}^{i+1} R^i ({}^i V_i + {}^i W_i \times {}^i p_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \hat{z}_{i+1} \quad \text{QED}$$

12 TENSORE D'INERZIA

22

Si definisce momento d'inerzia di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse la quantità $I = \int_V r^2 \rho \, dv$, dove V è il volume del corpo, r la distanza dall'asse di rotazione del cubetto infinitesimo e ρ la densità.

Fissando al corpo una terra di riferimento $\{A\}$ e indicando la posizione del cubetto infinitesimo tramite il vettore \vec{p} , si può introdurre il tensore d'inerzia:

$${}^A \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad N$$

le cui componenti hanno le seguenti espressioni:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \int_V (y^2 + z^2) \rho \, dv \\ I_{yy} &= \int_V (x^2 + z^2) \rho \, dv \\ I_{zz} &= \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dv \end{aligned} \right\} \text{momenti d'inerzia}$$

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = - \int_V xy \rho \, dv \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \int_V xz \rho \, dv \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \int_V yz \rho \, dv \end{aligned} \right\} \text{prodotti d'inerzia}$$

Si noti che la quantità $(y^2 + z^2)$ che compare nell'espressione di I_{xx} non è altro che la distanza al quadrato del cubetto rispetto ad \hat{x} ; lo stesso vale per I_{yy} e I_{zz} .

Per ogni corpo esiste una particolare terra $\{A^*\}$ rispetto alla quale il tensore d'inerzia assume la forma:

$${}^{A^*} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Gli assi di questa terra prendono il nome di assi principali d'inerzia con i rispettivi momenti principali d'inerzia.

Questa particolare Terra deve avere l'origine nel baricentro del corpo.

(23)

Si definisce baricentro di un corpo rigido il punto $\hat{p}_c = [x_c \ y_c \ z_c]^T$ per il quale le componenti sono date da:

$$x_c = \frac{\int_V x \rho \, dv}{\int_V \rho \, dv} \quad y_c = \frac{\int_V y \rho \, dv}{\int_V \rho \, dv} \quad z_c = \frac{\int_V z \rho \, dv}{\int_V \rho \, dv}$$

$\underbrace{\int_V \rho \, dv}_{\text{massa}}$

Quindi il punto \hat{p}_c è definito come: $\hat{p}_c = \frac{\int_V \hat{p} \rho \, dv}{\int_V \rho \, dv}$.

Si noti che il baricentro di un corpo è invariante rispetto alla Terra di riferimento presa in considerazione.

PROPRIETÀ

1. Si supponga che il corpo ammetta un piano di simmetria, e che due componenti della Terra siano compresi in tale piano. Allora i prodotti d'inerzia che contengono il vettore che non si trova sul piano sono identicamente nulli.
2. I momenti d'inerzia di un corpo sono sempre positivi. I prodotti d'inerzia possono invece essere sia positivi che negativi.
3. La somma dei tre momenti d'inerzia di un corpo è invariante rispetto a modifiche dell'orientamento della Terra di riferimento.
4. Gli autovalori del tensore d'inerzia sono i momenti principali d'inerzia. Gli autovettori del tensore d'inerzia sono gli assi principali d'inerzia.

Leggi fondamentali che governano il moto dei corpi rigidi:

equazione di Newton: $F = m \dot{v}_c$
(movimenti traslatori)

equazione di Eulero: $N = I \dot{\omega}_c + \omega_c \times I \omega_c$
(movimenti rotatori)

FORME RICORSIVE

(24)

Sono equazioni che permettono di risolvere la cinematica inversa.

Si considerino le leve $\{i\}$ e $\{i+1\}$ fissate ai bracci i e $i+1$ di un manipolatore; sia inoltre una leva $\{c\}$ posta nel baricentro e orientata come la leva $\{i\}$. Si ha che:

$${}^c w_{ci} = {}^c R {}^i w_i + 0 = I_3 {}^i w_i = {}^i w_i$$

in quanto $\{i\}$ e $\{c\}$ sono orientate allo stesso modo

La velocità angolare non dipende dal sistema di riferimento scelto, quindi ${}^c w_{ci} = {}^i w_{ci}$, pertanto si avrà che ${}^i w_{ci} = {}^i w_i$. Allo stesso modo si ha:

$${}^c \dot{w}_{ci} = {}^i \dot{w}_{ci} = {}^c R \dot{w}_i + 0 = I_3 \dot{w}_i = \dot{w}_i$$

In fine:

$${}^c \dot{v}_{ci} = {}^i \dot{v}_{ci} = {}^c R [{}^i \dot{\alpha}_i \times {}^i p_{ci} + {}^i w_i \times ({}^i w_i \times {}^i p_{ci}) + {}^i a_i]$$

Riassumendo, abbiamo che:

$$\begin{cases} {}^i w_{ci} = {}^i w_i \\ {}^i \dot{w}_{ci} = \dot{w}_i \\ {}^i a_{ci} = \dot{\alpha}_i \times {}^i p_{ci} + {}^i w_i \times ({}^i w_i \times {}^i p_{ci}) + {}^i a_i \end{cases}$$

E' possibile ora calcolare la risultante di forze e coppie utilizzando le equazioni di Newton ed Eulero:

$$\begin{aligned} {}^i F_i &= m_i {}^i a_{ci} \\ {}^i N_i &= {}^c I {}^c \dot{w}_{ci} + {}^i w_{ci} \times {}^c I {}^c w_{ci} \end{aligned}$$

Siano ${}^i f_i$ e ${}^i f_{i+1}$ le forze che agiscono rispettivamente sul braccio i e $i+1$, descritte rispetto a $\{i\}$. Analogamente siano ${}^i n_i$ e ${}^i n_{i+1}$ le coppie generate sui bracci i e $i+1$, descritte rispetto a $\{i\}$.

Si avrà che:

$$\begin{aligned} {}^i F_i &= {}^i f_i - {}^i f_{i+1} && \rightarrow \text{coppie generate dalle forze} \\ {}^i N_i &= {}^i n_i - {}^i n_{i+1} + ({}^i p_{ci}) \times {}^i f_i + ({}^i p_{i+1} - {}^i p_{ci}) \times ({}^i f_{i+1}) \end{aligned}$$

Mettendo in evidenza ${}^i f_i$ e ${}^i n_i$ si avrà:

(25)

$${}^i f_i = {}^i F_i + {}^{i-1}R^{i-1} {}^i f_{i-1}$$

$${}^i n_i = {}^{i-1}R^{i-1} {}^i n_{i-1} - {}^i p_{i-1} \times \underbrace{({}^i f_i - {}^i f_{i-1})}_{= {}^i F_i} + {}^i p_{i-1} \times {}^i f_{i-1} + {}^i N_i$$

Queste equazioni sono volute braccio per braccio, iniziando dal braccio n e procedendo all'indietro fino alla base del manipolatore.

Per concludere, queste equazioni permettono di definire la forma attrinca lineare nel caso di giunti rotazionali o prismatici:

$$\tau_i = {}^{i-1}n_i^T \dot{z}_i \quad \text{rotazionale}$$

$$\tau_i = {}^i f_i^T \dot{z}_i \quad \text{prismatico}$$

SINGOLARITÀ CINEMATICHE

Il rango dello jacobiano geometrico si abbassa in corrispondenza di configurazioni particolari. Quando si verifica una situazione di questo genere, si ha una perdita di mobilità del manipolatore.

In presenza di singolarità cinematiche si ha che:

- viene precluso il moto dell'ultima terra in alcune direzioni
- a velocità limitate dell'ultima terra corrispondono velocità infinite di qualcuna delle velocità di giunte
- a forze e coppie limitate applicate sull'ultima terra possono corrispondere forze e coppie infinite su alcuni dei giunti
- il problema della cinematica inversa potrebbe non ammettere alcuna soluzione oppure infinite.

(13)

STATICA DEI MANIPOLATORI

(26)

Si applichi una forza F ed una coppia N sull'ultima Terra di un manipolatore. Per conoscere le forze e le coppie che agiscono su tutti i giunti serve un calcolo retrogrado.

Si considerino due bracci successivi, i e $i+1$. I bracci sono in equilibrio, ovvero la risultante di tutte le forze è nulla.

Sia p il vettore che descrive l'origine della Terra $\{i\}$ rispetto alla Terra $\{i+1\}$, e sia f_i la forza che il braccio $i+1$ esercita sul braccio i e f_{i+1} la forza che il braccio i esercita sul braccio $i+1$.

Si può scrivere che:

$$f_i + (-f_{i+1}) = 0$$

$${}^i f_i + (-{}^i f_{i+1}) = 0 \quad \text{descrivendo tutto rispetto ad } \{i\}$$

Sempre perché i bracci sono in equilibrio, anche la risultante delle coppie sono nulla:

$${}^i n_i + (-{}^i n_{i+1}) + \underbrace{{}^i p_{i+1} \times (-{}^i f_{i+1})}_{\text{coppia generata da } -f_{i+1}} = 0$$

coppia generata da $-f_{i+1}$

Sviluppando le equazioni ottenute ed applicando il cambio di descrizione tramite matrice di rotazione si avrà:

$$\begin{cases} {}^i f_i = {}^i R^{i+1} f_{i+1} \\ {}^i n_i = {}^i R^{i+1} n_{i+1} + {}^i p_{i+1} \times {}^i f_i \end{cases}$$

Nel caso di un giunto prismatico l'unica componente di forza che il motore deve bilanciare è quella lungo l'asse \hat{z} :

$$\tau_i = {}^i f_i \cdot \hat{z}_i$$

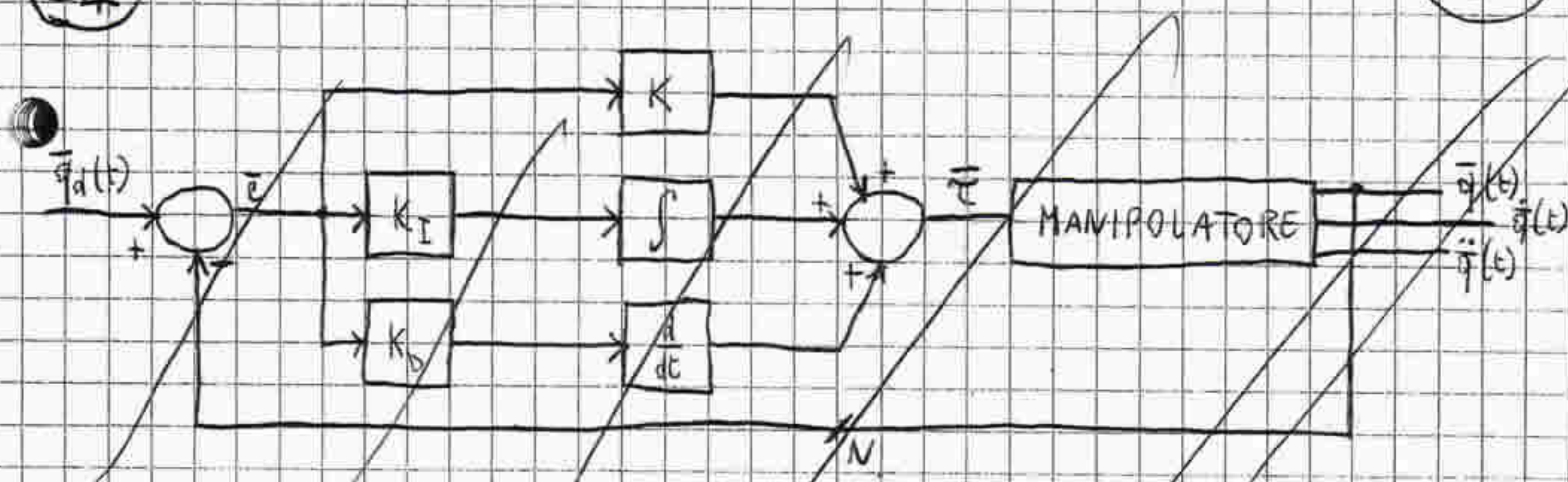
Nel caso invece di un giunto rotazionale l'unica componente di coppia da bilanciare è quella lungo l'asse \hat{z} :

$$\tau_i = {}^i n_i \cdot \hat{z}_i$$

14

PID A GIUNTI INDIPENDENTI

27



$\bar{q}_d(t)$: traiettoria desiderata

$\bar{q}(t)$: posizione reale del manipolatore

PROBLEMI:

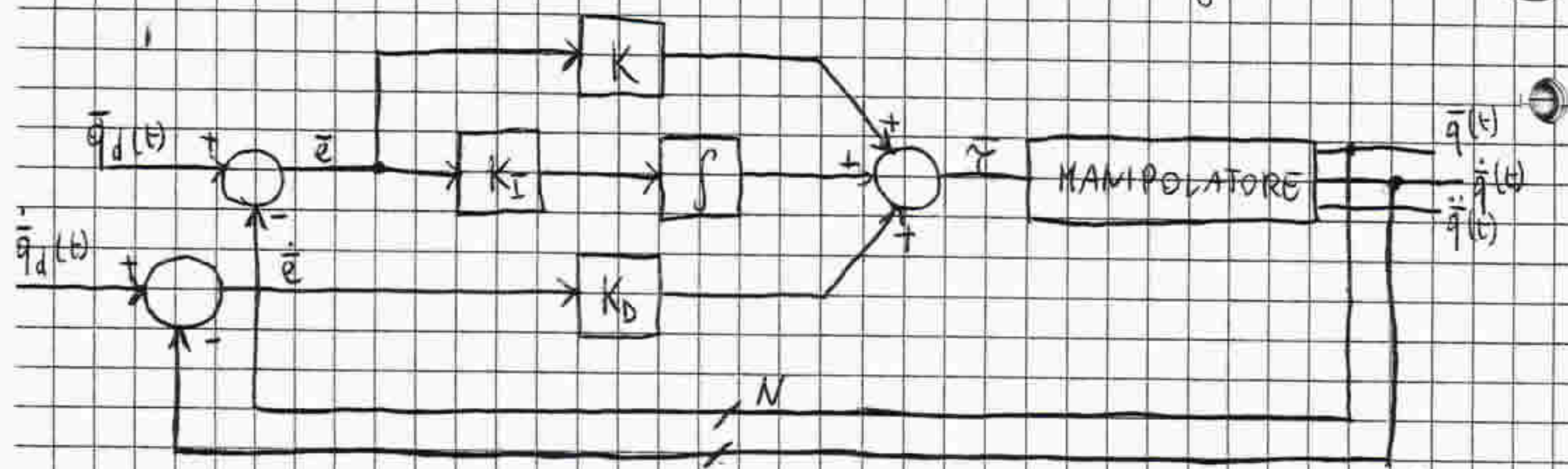
- il sistema è tempo variante, quindi può avere uno scatto ed andare fuori dallo spazio desiderato
- il sistema è non lineare; ad esempio, se ho un braccio piegato e voglio distenderlo del tutto il manipolatore richiede poca coppia perché è quasi in equilibrio, mentre richiede molta coppia quando arriva a distendersi
- ogni movimento di un braccio ha ripercussioni su tutti i bracci successivi e quindi i regolatori di questi ultimi bracci rilevano degli errori e passa del tempo prima che tutto si stabilizzi
- ogni regolatore non sa cosa sta facendo l'altro, pensa solo al suo braccio, quindi possono occorrere spostamenti indesiderati

VANTAGGI:

- costa poco
- la taratura non richiede la conoscenza delle equazioni del manipolatore

Lo schema dei controllori PID utilizzati in robotica è il seguente.

(28)



L'equazione che governa il manipolatore è:

$$\bar{\tau} = K\bar{e} + K_I \frac{\bar{e}}{s} + K_D \dot{\bar{e}}$$

oppure in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_N \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{I1} & & & \\ & K_{I2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{IN} \end{bmatrix}}_{K_I} \begin{bmatrix} e_1/s \\ e_2/s \\ \vdots \\ e_N/s \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{D1} & & & \\ & K_{D2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{DN} \end{bmatrix}}_{K_D} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_N \end{bmatrix}$$

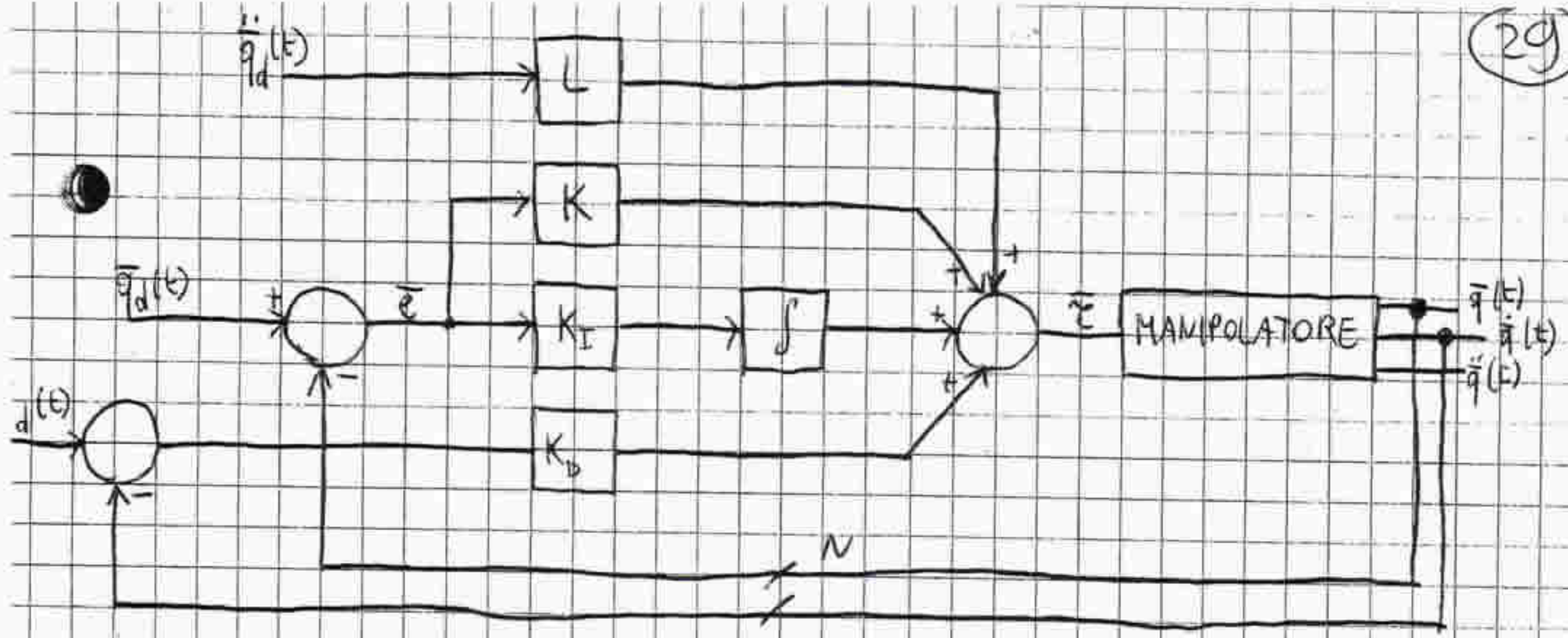
È possibile migliorare questo schema introducendo un'azione di feed forward: chiede ai motori le coppie in anticipo per gestire gli errori che sono causati dai non linearità del manipolatore.

Equazione del manipolatore: $\bar{\tau} = M(\bar{q})\ddot{\bar{q}} + V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q}) + F(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$

Desidero che $\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}}$ mi forniscano i dati di coppia da richiedere, e suppongo invece di non conoscere $\bar{\tau}$. Poiché l'effetto maggiore è dato da $M(\bar{q})\ddot{\bar{q}}$, semplifico l'equazione precedente: ci pensiamo il regolatore retroazionata a compensare le mancanze ($\bar{\tau} = M(\bar{q})\ddot{\bar{q}}$).

Supponendo di non riuscire a calcolare nemmeno $M(\bar{q})$, la sostituisco con una matrice diagonale positiva di cui scelgo i valori in diagonale:

$$\bar{\tau} = L \ddot{\bar{q}}$$

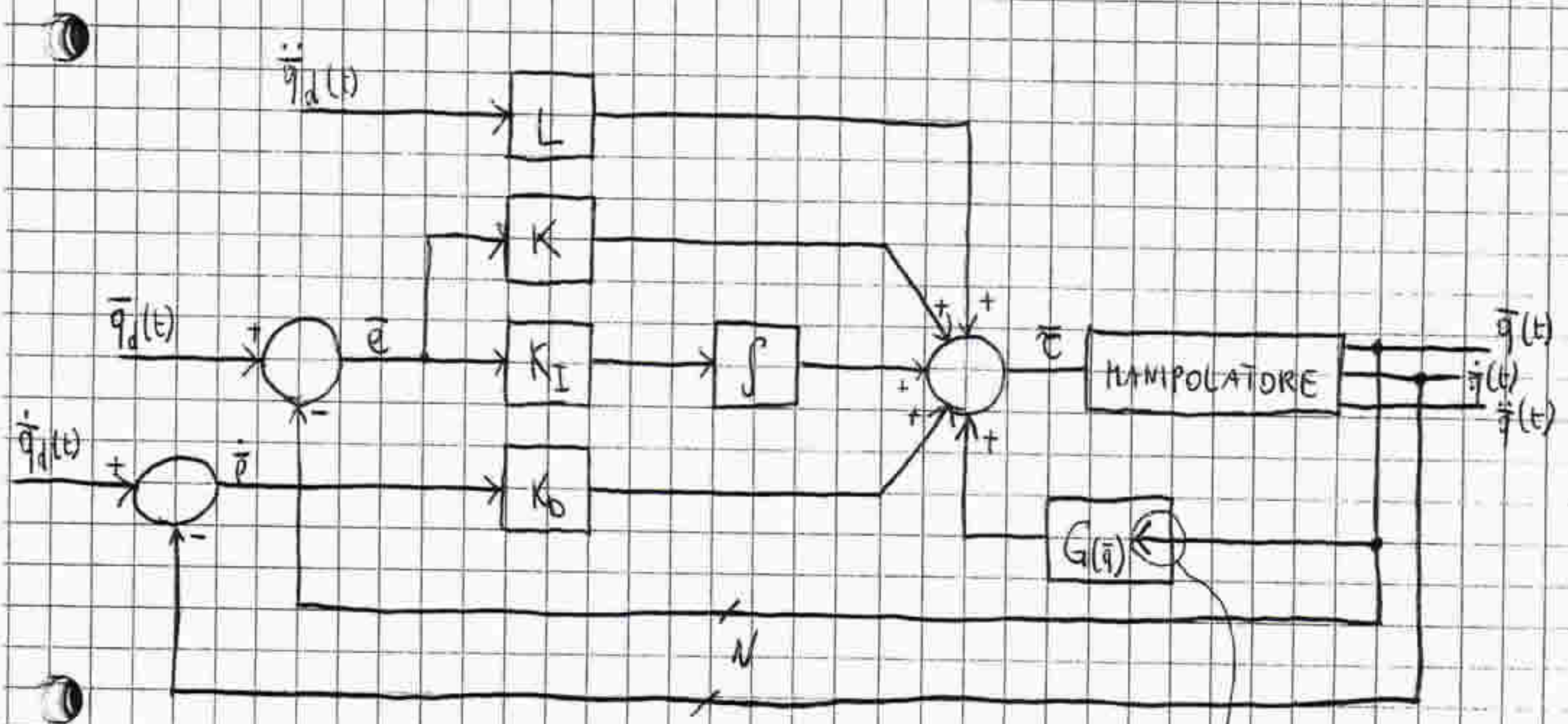


L'equazione del controllore diventa:

$$\tau = K e + K_I \int e + K_D \dot{e} + L \ddot{q}_d$$

15 CONT. CON COMPENSAZIONE DI GRAVITA'

E' possibile migliorare il controllore PID a giunti indipendenti stimando la coppia da richiedere prima che si verifichi l'errore. La componente $G(\bar{q})$ della equazione del manipolatore e quella piu facilmente stimabile, si puo dunque pensare di chiedere in anticipo $G(\bar{q})$, ovvero la coppia che permette di tenere in equilibrio il manipolatore.



la freccia qui entra perché modifica $G(\bar{q})$

VANTAGGI:

- caratteristiche migliorate e migliore equilibrio del manipolatore

SVANTAGGI:

- richiede la conoscenza, seppur minima, dell'espressione di \bar{z} (non si può agire solo su K)

- il valore di coppia di g_1 dipende non solo da q_1 ma anche da q_2, q_3, \dots, q_n

$$G(\bar{q}) = \begin{bmatrix} g_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ g_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ g_n(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix}$$

È necessario un controllore centralizzato che controlli e agisca contemporaneamente su tutti i giunti.

Si aggiunge quindi un termine all'equazione:

$$\ddot{\bar{z}} = K\bar{z} + K_I \frac{\bar{z}}{s} + K_D \dot{\bar{z}} + L \ddot{q}_d + G(\bar{q})$$

16

CONT. A DINAMICA INVERSA

È un controllore progettato per avere prestazioni elevate ed alta precisione. Si ha completo disaccoppiamento e completa linearizzazione delle equazioni del manipolatore.

Si definiscono le seguenti quantità:

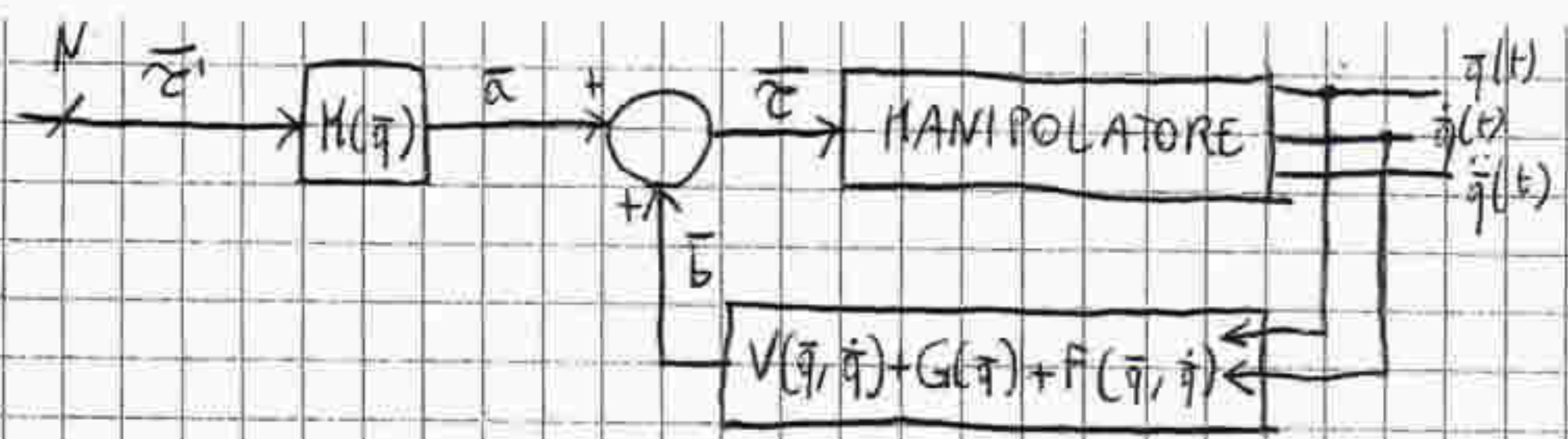
① $\bar{z} = \bar{a} + \bar{b}$

② $\bar{a} = M(\bar{q}) \bar{z}'$

③ $\bar{b} = V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q}) + F(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$

④ $\bar{z}' = \ddot{q}_d + K_D \dot{\bar{z}} + K\bar{z}$ (nota: le matrici K sono diagonali)

Desidero linearizzare e disaccoppiare le variabili.



Equazioni di questo sistema

manipolatore $\rightarrow \bar{z} = M(\bar{q}) \ddot{\bar{q}} + V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q}) + F(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$

\downarrow per la ①
 $\bar{a} + \bar{b} = M(\bar{q}) \ddot{\bar{q}} + V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q}) + F(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$

\downarrow per la ② e ③
 $M(\bar{q}) \bar{z}' + V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q}) + F(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = M(\bar{q}) \ddot{\bar{q}} + V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q}) + F(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$

$M(\bar{q}) \bar{z}' = M(\bar{q}) \ddot{\bar{q}}$

ed essendo M sempre invertibile posso moltiplicare ambo i membri per $M^{-1}(\bar{q})$ e ottenere

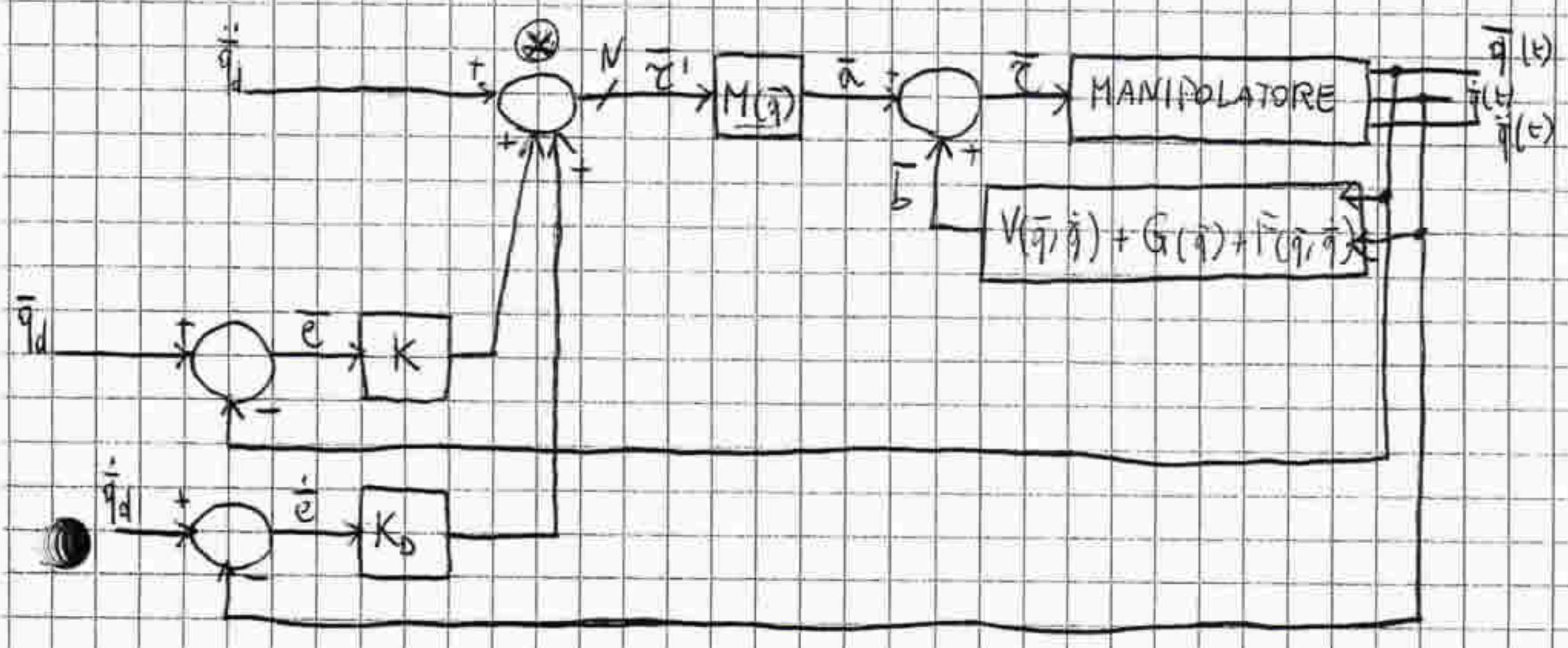
$\bar{z}' = \ddot{\bar{q}}$

che espandendo diventa

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix}$$

Dunque è stata trovata una relazione tra l'ingresso \bar{z}' e l'uscita $\ddot{\bar{q}}$ che è lineare; inoltre le variabili sono disaccoppiate: z'_i agisce solo su \ddot{q}_i ecc.

Aggiunge ora un regolatore retroazionato già lineare:



Analizziamo il sommatore \otimes :

(30)

$$\ddot{\bar{q}}_d - \bar{c}' + K\bar{e} + K_D\dot{\bar{e}} = 0$$

$$\dot{\bar{q}}_d - \dot{\bar{q}} + K\bar{e} + K_D\dot{\bar{e}} = 0$$

$$\dot{\bar{e}} + K_D\dot{\bar{e}} + K\bar{e} = 0$$

Essendo tutte matrici diagonali, si può sommare questa equazione in N equazioni scalari:

$$\dot{e}_i + K_{D_i}\dot{e}_i + K_i e_i = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N$$

Passando alle trasformate di Laplace ottengo:

$$s^2 E_i(s) - s e_i(0) - \dot{e}_i(0) + K_{D_i} [s E_i(s) - e_i(0)] + K_i E_i(s) = 0$$

$$E_i(s) [s^2 + K_{D_i} s + K_i] = s e_i(0) + \dot{e}_i(0) + K_{D_i} e_i(0)$$

$$E_i(s) = \frac{s e_i(0) + \dot{e}_i(0) + K_{D_i} e_i(0)}{s^2 + K_{D_i} s + K_i}$$

Il sistema è stabile per $K_{D_i} > 0$, $K_i > 0$.

Scegliendo dei valori appropriati di K_{D_i} e K_i posso avere l'errore che va a zero molto velocemente.

SVANTAGGI:

- il controllore si basa sulla conoscenza perfetta dei parametri del manipolatore mentre si conoscono solo in modo approssimativo.

- le equazioni sono molto complesse perché dipendono sempre da \ddot{q} , \dot{q} e q dunque si è costretti ad utilizzare dei tempi di campionamento molto lunghi.

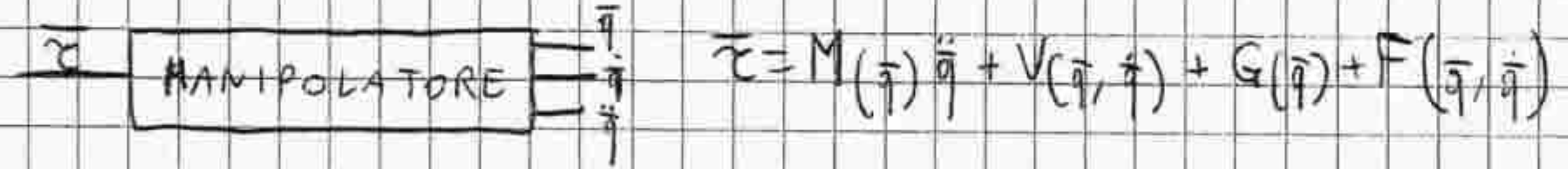
17

CONT. A COPPIA PRECALCOLATA

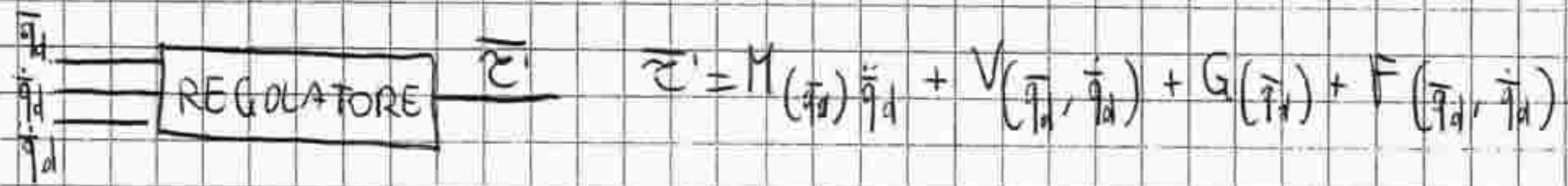
33

Questo tipo di controllore permette calcoli più rapidi e ha prestazioni simili (seppur inferiori) ai regolatori precedenti.

Caratteristica principale è che i conti relativi alla dinamica inversa vengono eseguiti prima che il manipolatore si muova.

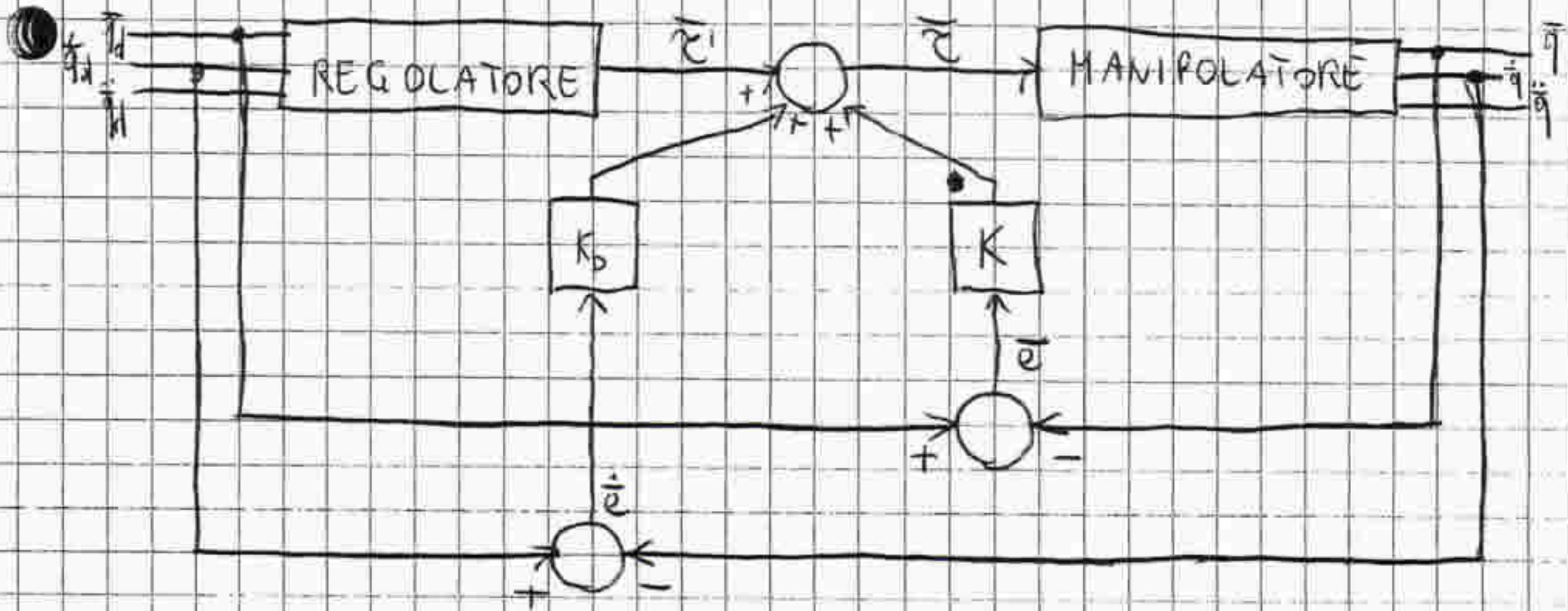


Immagino che non agisca nessuna retroazione sul controllore; voglio eseguire la traiettoria $\bar{q}_d, \dot{\bar{q}}_d$ e $\ddot{\bar{q}}_d$; quindi il regolatore fornisce la coppia da utilizzare in base ai valori desiderati:



Poiché non si conosce perfettamente l'espressione delle matrici in $\bar{\tau}$, servono molte approssimazioni, è bene introdurre un anello di retroazione per correggere le imprecisioni dovute a $\bar{\tau}$.

Il controllore avrà dunque la seguente forma:



$$\bar{\tau} = \bar{\tau}' + K_b \dot{e} + K e$$

VANTAGGI: \bar{q}_d , $\dot{\bar{q}}_d$ e $\ddot{\bar{q}}_d$ sono calcolati in anticipo, ed essendo la parte consistente da calcolare, è possibile scegliere tempi di campionamento più piccoli.

SVANTAGGI: calcola la dinamica dell'errore.

$$\tau' - \tau + K_v \dot{e} + K_p e = 0$$

Calcola la differenza tra le equazioni del manipolatore e quelle del regolatore, considerando la condizione più favorevole in cui:

$$M(\bar{q}) \approx M(\bar{q}_d) = M(\bar{q}_1)$$

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \approx V(\bar{q}_d, \dot{\bar{q}}_d)$$

$$G(\bar{q}) \approx G(\bar{q}_d)$$

$$F(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \approx F(\bar{q}_d, \dot{\bar{q}}_d)$$

Si ha dunque:

$$\tau' - \tau - M(\bar{q}) [\ddot{\bar{q}}_d - \ddot{\bar{q}}] = 0$$

$$\tau' - \tau = M(\bar{q}) \ddot{e}$$

Tramando alla prima equazione e sostituendo il risultato ottenuto si ha:

$$M(\bar{q}) \ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = 0$$

Moltiplica tutto per $M^{-1}(\bar{q})$, siccome M è sempre invertibile:

$$\ddot{e} + M^{-1}(\bar{q}) K_v \dot{e} + M^{-1}(\bar{q}) K_p e = 0$$

Le matrici M^{-1} sono piene, ovvero non sono matrici diagonali; ciò significa che non c'è disaccoppiamento dell'errore, pertanto un errore su un braccio si propagerà su tutto il manipolatore. Inoltre non è nemmeno un'equazione lineare.

Si voglia pianificare l'andamento di $q_i(t)$, variabile dell' i -esimo giunto del manipolatore, nel tempo; ovvero si voglia pianificare la traiettoria.

$$q_i(t_0) \rightarrow q_i(t) \rightarrow q_i(t_f)$$

Utilizzo θ come variabile di giunto, anche nel caso di giunto prismatico.

$$\theta_i(t_0) \rightarrow \theta_i(t) \rightarrow \theta_i(t_f)$$

Sia noto che all'istante $t_0=0$ la variabile $\theta_i(0)$ sia θ_0 , e che all'istante t_f $\theta_i(t_f) = \theta_f$, dove t_f è il tempo di percorrenza della traiettoria.

Si sa noto anche che il braccio inizialmente è fermo, e che termina la traiettoria fermandosi; cioè $\dot{\theta}_i(0) = 0$ e $\dot{\theta}_i(t_f) = 0$.

(Tralascio l'indice i d'ora in avanti)

Le equazioni del moto sono:

$$\textcircled{1} \theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\textcircled{2} \dot{\theta}(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\textcircled{3} \ddot{\theta}(t) = \frac{d}{dt} \dot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

Devo trovare un'espressione per a_0, a_1, a_2 e a_3 .

Calcolo la $\textcircled{1}$ agli istanti t_0 e t_f :

$$\theta(0) = a_0 = \theta_0$$

$$\theta(t_f) = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = \theta_f$$

Calcolo la $\textcircled{2}$ agli istanti t_0 e t_f :

$$\dot{\theta}(0) = a_1 = 0$$

$$\dot{\theta}(t_f) = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 = 0$$

Metto a sistema le espressioni trovate:

$$\begin{cases} \theta_j - \theta_0 = a_1 t_j + a_2 t_j^2 + a_3 t_j^3 \\ \theta_j - \theta_0 = 2a_2 t_j + 3a_3 t_j^2 \\ a_1 = 0 \\ \theta_0 = \theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_j - \theta_0 = a_2 t_j^2 + a_3 t_j^3 & * \\ 0 = 2a_2 t_j + 3a_3 t_j^2 & ** \end{cases}$$

in quanto per ipotesi $\theta_j = 0$ e $\theta_0 = 0$

Ritorno a_3 dalla **: $3a_3 t_j^2 = -2a_2 t_j$

$$a_3 = -\frac{2a_2}{3} \frac{1}{t_j}$$

Sostituisco a_3 nella *:

$$\theta_j - \theta_0 = a_2 t_j^2 - \frac{2}{3} \frac{a_2}{t_j} t_j^3 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{t_j} (\theta_j - \theta_0)$$

Sostituisco a_2 in a_3 : $a_3 = -\frac{2}{t_j^2} (\theta_j - \theta_0)$

Ho dunque un'espressione per tutte le variabili correnti

Nel caso in cui si voglia che il manipolatore (braccio) passi per alcuni punti intermedi prestabiliti, le modalità di decisione sono molteplici:

- 1- L'utente specifica la velocità desiderata per ogni punto intermedio a partire dalla velocità generalizzata (lineare + angolare) della mano finale. La "mappatura" delle velocità ai punti intermedi viene effettuata usando la funzione geometrica inversa del manipolatore valutata nei punti intermedi. Nel caso però in cui un punto intermedio coincida con una singolarità cinematica del manipolatore, non è detto che sia possibile risolvere la cinematica inversa e quindi l'utente non è libero di assegnare una velocità arbitraria.

2- Il sistema decide automaticamente le velocità ai punti intermedi (37)
applicando un metodo esistente; in caso si abbia inversione di moto,
la velocità del punto viene fissata a zero, altrimenti viene posta come
media tra il tratto che precede e quello che segue.
Questo metodo garantisce la continuità della velocità, ma non
dell'accelerazione.

3- Il sistema decide automaticamente le velocità in modo tale che
l'accelerazione nei punti intermedi sia continua.
Considerando due punti intermedi, 1 e 2, le equazioni da imporre

sono 8:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1(0) = \theta_d \\ \theta_1(t_{j_1}) = \theta_v \end{array} \right\} \text{primo tratto}$$
$$\left. \begin{array}{l} \theta_2(0) = \theta_v \\ \theta_2(t_{j_2}) = \theta_f \end{array} \right\} \text{secondo tratto}$$
$$\left. \begin{array}{l} \dot{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\theta}_1(t_{j_1}) = 0 \end{array} \right\} \text{parte da fermo e termino fermo}$$
$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\theta}_1(t_{j_1}) = \ddot{\theta}_2(0) \\ \ddot{\theta}_1(t_{j_1}) = \ddot{\theta}_2(0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{velocità continua} \\ \text{accelerazione continua} \end{array}$$

ovvero $\theta_m = \frac{\theta_j + \theta_i}{2}$, $t_m = \frac{t_j}{2}$

(39)

● θ_b si trova alla fine del tratto parabolico, quindi:

$$\theta_b = \theta_i + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b t_b^2$$

Sostituendo nel rapporto incrementale questi valori e ottenendo:

$$\frac{\theta_j + \theta_i}{2} - \theta_i - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b t_b^2 = \ddot{\theta}_b t_b$$

L'unica incognita è t_b :

$$\ddot{\theta}_b t_b^2 - \ddot{\theta}_b t_b t_b + \theta_j - \theta_i = 0$$

↓

$$t_b = \frac{t_j}{2} + \frac{\sqrt{\ddot{\theta}_b^2 \cdot t_j^2 - 4 \ddot{\theta}_b (\theta_j - \theta_i)}}{2 \ddot{\theta}_b}$$

Sto analizzando il tratto con $t_b < t_m$ quindi elimino la soluzione θ_+ .

~~Esistono due soluzioni per t_b perché $\ddot{\theta}_b > 0$ e $\theta_j > \theta_i$~~

2° tratto: $t \in [t_b, t_j - t_b]$

$$\ddot{\theta}(t) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_b = \ddot{\theta}_b t$$

$$\theta(t) = \theta_b + \int_{t_b}^t \dot{\theta}_b d\tau = \theta_b + \dot{\theta}_b [t - t_b] = \theta_b + \ddot{\theta}_b t_b [t - t_b]$$

3° tratto: $t \in [t_j - t_b, t_j]$

$$\ddot{\theta}(t) = -\ddot{\theta}_b$$

$$\dot{\theta}(t) = -\ddot{\theta}_b t + \ddot{\theta}_b t_j = \ddot{\theta}_b (t_j - t)$$

$$\theta(t) = \int_{t_j - t_b}^t -\ddot{\theta}_b \tau d\tau + \theta_j = \theta_j - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b [t - t_j + t_b]^2 + \theta_j$$

Esistono dei vincoli su $\ddot{\theta}_b$ in quanto il Δ di t_b potrebbe risultare negativo, e una soluzione immaginaria non è accettabile.

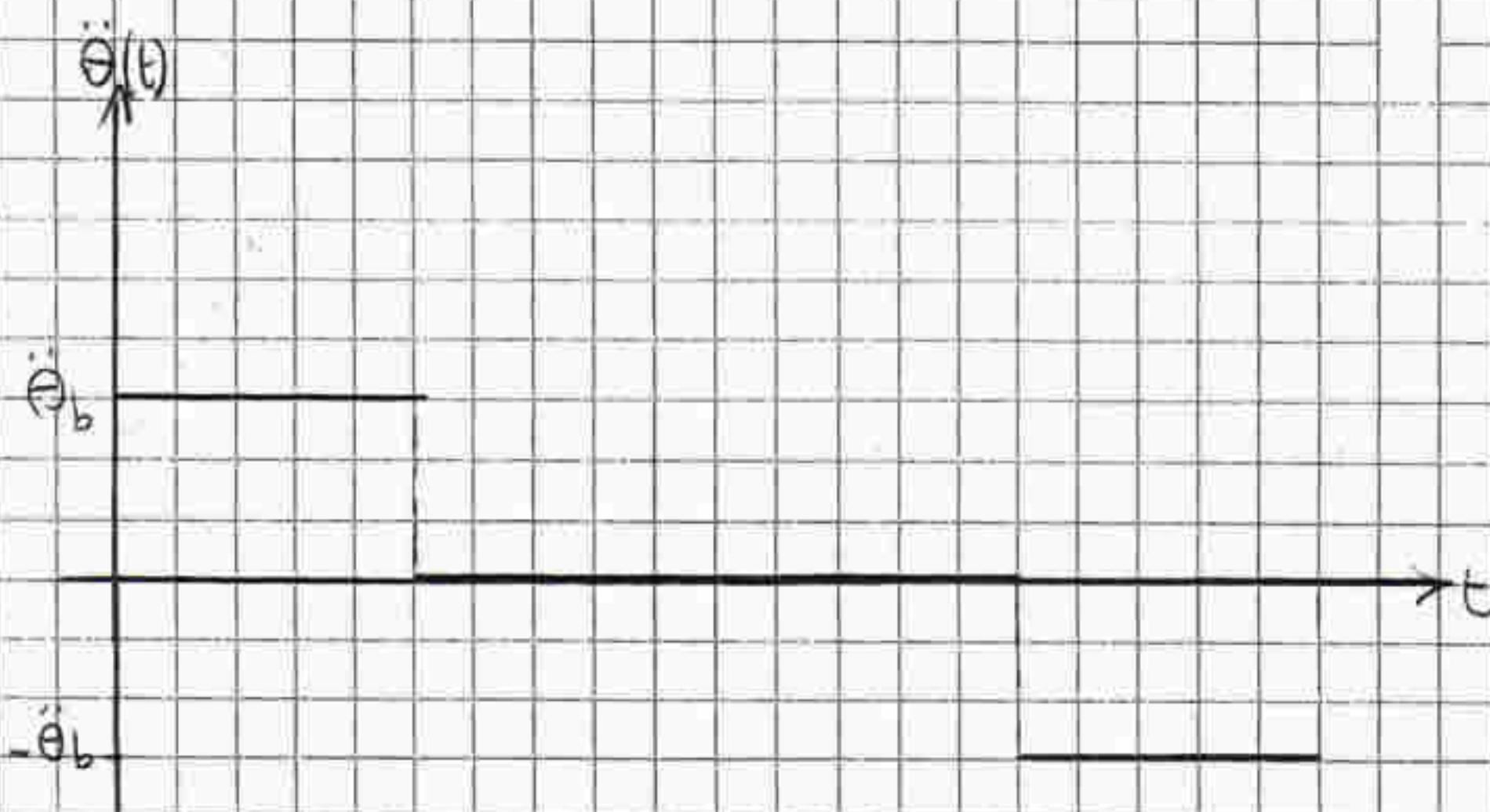
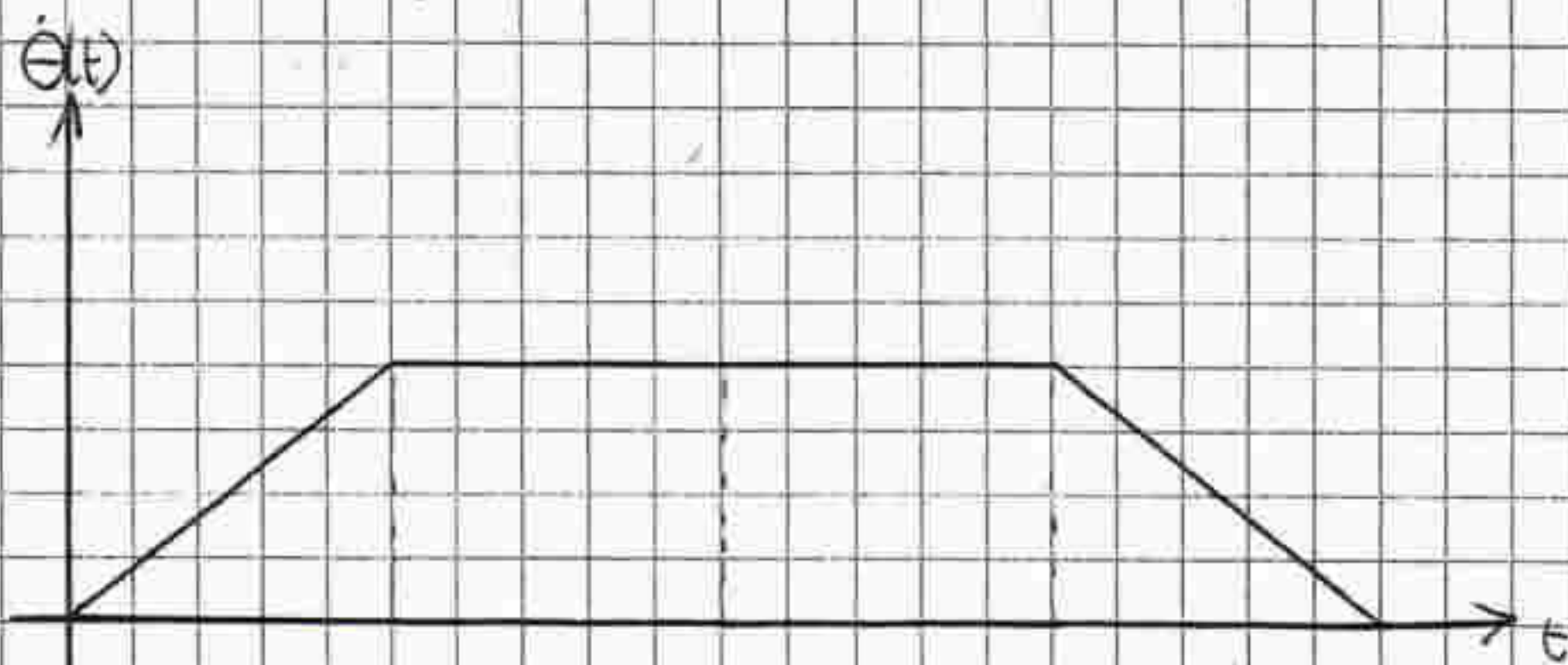
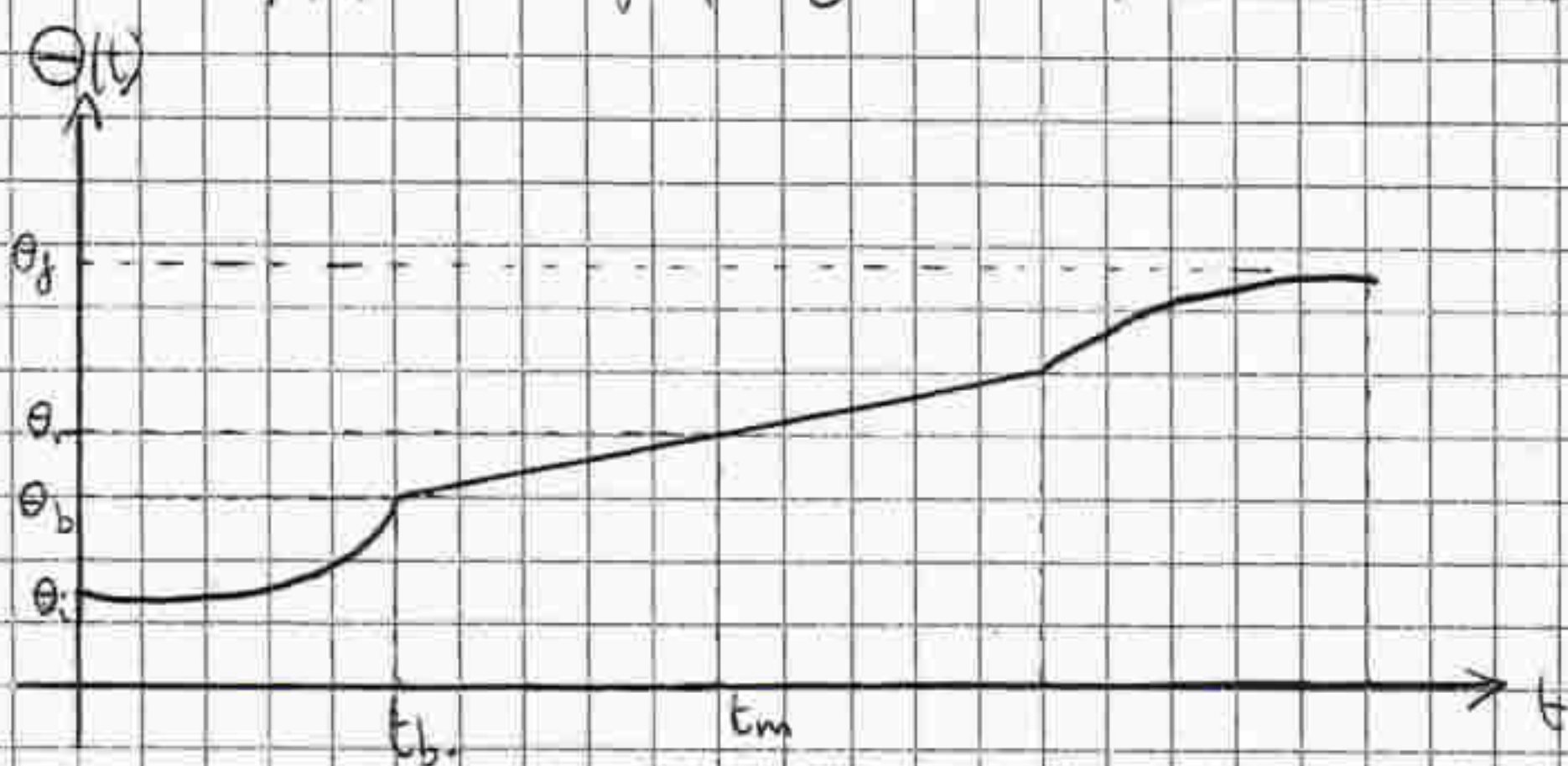
● $\Delta > 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_b t_j^2 - 4 \ddot{\theta}_b (\theta_j - \theta_i) > 0$ quindi per $\ddot{\theta}_b$ che è positivo

$$\ddot{\theta}_b > \frac{4(\theta_j - \theta_i)}{t_j^2}$$

19 (38)

PIANIFICAZIONE UNA TRAIETTORIA

MEZZI ADIR
 FUNZIONI
 LINEARI
 QUADRATICHE



Siano assegnate $\theta_i, \theta_f, \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_f, t_f, \dot{\theta}_b$. Devo trovare $\dot{\theta}_b$ e t_b .

1° tratto: $t \in [0, t_b]$

$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_b$ perché $\dot{\theta}_i = 0$ per ipotesi ~~...~~

$\theta(t) = \dot{\theta}_i + \int_0^{t_b} \dot{\theta}(\tau) d\tau = 0 + \dot{\theta}_b [t_b - 0] = \dot{\theta}_b t_b$

$\theta(t) = \theta_i + \int_0^{t_b} \dot{\theta}(\tau) \tau d\tau = \theta_i + \frac{1}{2} \dot{\theta}_b t_b^2$; inoltre a $t=t_b$ $\dot{\theta}_b = \dot{\theta}_b t_b$

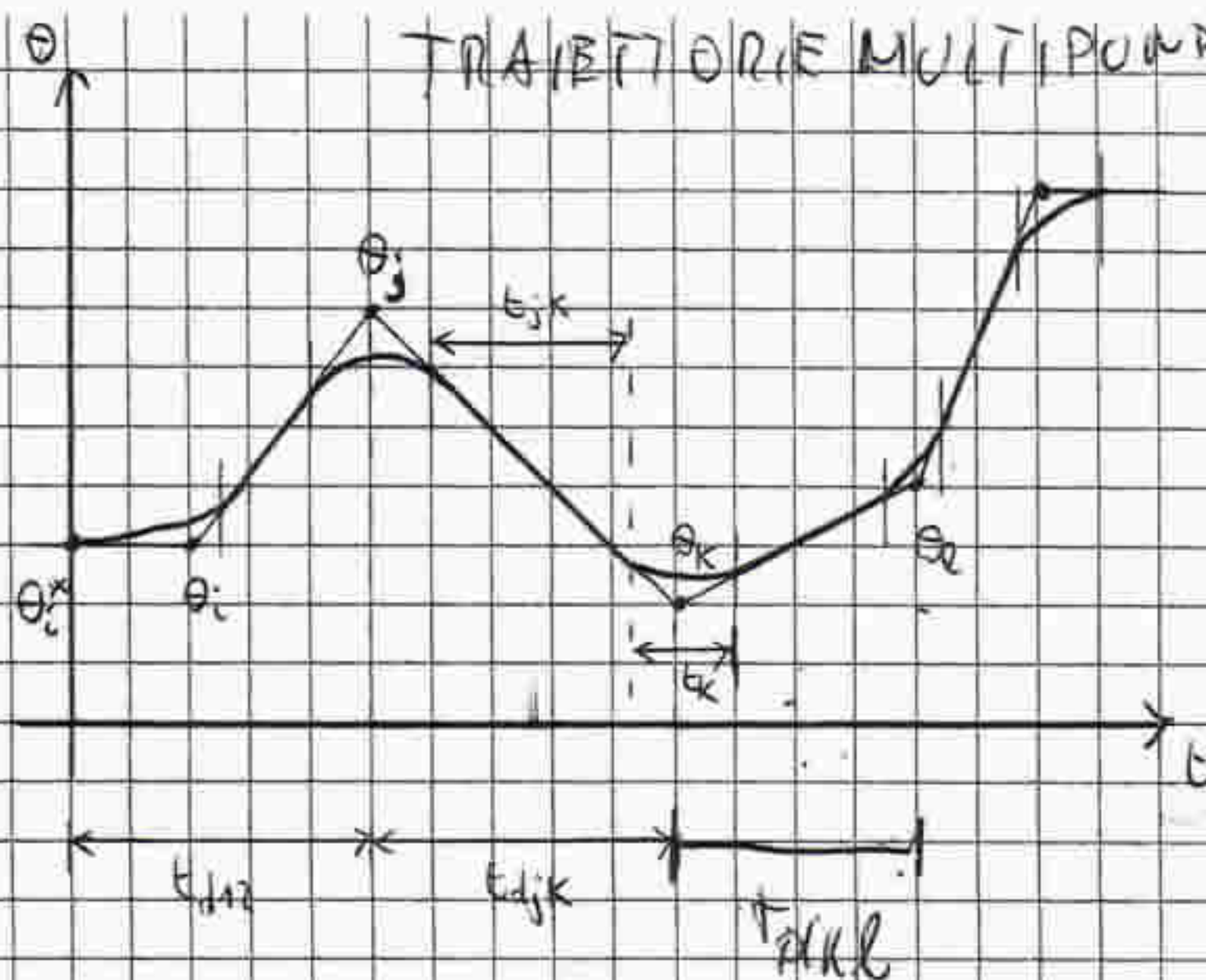
La velocità nel tratto intermedio sarà ~~...~~ lineare:

rapporto incrementale $\rightarrow \frac{\theta_m - \theta_b}{t_m - t_b} = \dot{\theta}_b t_b$

20

TRAIBETTORIE MULTIPUNTO

40



Siano note: $|\dot{\theta}_k|$, $|\dot{\theta}_j|$, $|\dot{\theta}_e|$, t_{djk} . Bisogna trovare $\ddot{\theta}_{jk}$, $\ddot{\theta}_{ke}$, t_{ke} .

$$\dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \quad \dot{\theta}_{ke} = \frac{\theta_e - \theta_k}{t_{ake}}$$

In generale si può scrivere $\ddot{\theta}_k = |\ddot{\theta}_k| \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{ke} - \dot{\theta}_{jk})$.

Analizzando $\dot{\theta}_{ke}$ si ricava t_{ke} :

$$\theta_{ke} = \dot{\theta}_{jk} + \int_0^{t_{ke}} \ddot{\theta}_k \, d\tau = \dot{\theta}_{jk} + \ddot{\theta}_k t_{ke} \Rightarrow t_{ke} = \frac{\theta_{ke} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}$$

Inoltre si può ricavare un'espressione per t_{ijk} :

$$t_{djk} = \frac{t_j}{2} + t_{ijk} + \frac{t_k}{2} \Rightarrow t_{ijk} = t_{djk} - \frac{1}{2}(t_j + t_k)$$

Si conoscano così tutti i parametri per pianificare la traiettoria nei tratti intermedi.

Per quanto riguarda invece il primo e l'ultimo tratto, questi vanno trattati in modo leggermente differente in quanto vanno trasformati in un tratto di blend; per il primo tratto ad esempio, sposta θ_i^* (il vero angolo iniziale al tempo $t=0$) in un punto fittizio che chiamo θ_1 .

Analogamente a prima si avrà, considerando il punto iniziale θ_1 e il successivo θ_2 :

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\frac{t_1}{2} + t_{12} + \frac{t_2}{2}} = \ddot{\theta}_1 t_1$$

Risolvendole per t_1 si trovano facilmente $\dot{\theta}_{12}$ e t_{12} :

(41)

$$\dot{\theta}_1 = |\dot{\theta}_1| \operatorname{sgn}(\theta_2 - \theta_1)$$
$$t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\dot{\theta}_1}}$$

$$\dot{\theta}_2 t_1 = \dot{\theta}_{12} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{t_1}{2}}$$

$$t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2} t_2$$

Utilizzando lo stesso procedimento descritto per il tratto iniziale si ricavano le equazioni del tratto finale:

$$\frac{-\theta_{n-1} + \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{t_n}{2}} = \dot{\theta}_n t_n$$

da cui:

$$\dot{\theta}_n = |\dot{\theta}_n| \operatorname{sgn}(\theta_{n-1} - \theta_n)$$

$$t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\dot{\theta}_n}}$$

$$\dot{\theta}_{(n-1)n} = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{t_n}{2}}$$

$$t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{t_{n-1}}{2}$$

21

SPAZIO OPERATIVO

42

nello spazio dei giunti

Pianificando la traiettoria V sono sicuro che passerò per i punti da me specificati, con una traiettoria nello spazio tra le infinite possibili.

Li sono così però in cui voglio che la traiettoria sia la più rettilinea possibile: è necessario in questi casi pianificare nello spazio operativo.

Bisogna stabilire una legge che indichi istante per istante posizione e orientamento dell'organo utensile valutando ${}^sT(t)$, cioè la matrice di trasformazione omogenea in funzione del tempo che descrive l'utensile rispetto alla base (T: tool, S: station).

$${}^sT(t) = \begin{bmatrix} {}^sR(t) & | & {}^sP_T(t) \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Una volta determinata tale legge del moto, è necessario calcolarla per valori temporali discreti ($\tau, 2\tau, 3\tau \dots$ con τ : tempo di campionamento).

Ovvero si dovrà calcolare:

$${}^sT(0) \quad {}^sT(\tau) \quad {}^sT(2\tau) \quad \dots \quad {}^sT(i\tau)$$

Il ~~manipolatore~~ ^{manipolatore} poi si occuperà di calcolare la cinematica inversa a tempo di esecuzione (runtime) per inviare ogni τ secondi i segnali di set-point ai controllori:

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{q}(0) & & \bar{q}(\tau) & & \bar{q}(2\tau) & & \bar{q}(i\tau) \end{array}$$

Questa rappresenta una prima evidente differenza rispetto alla pianificazione nello spazio dei giunti; in quel caso infatti la cinematica inversa veniva risolta anticipatamente.

Così facendo si ottiene una traiettoria spezzata che porta le sole informazioni di \ddot{q} e non tiene conto di \dot{q} e \dot{q} ; risulta dunque poco precisa.

Indicando con Θ la pendenza del tratto considerato, questa può essere valutata in modo approssimativo come:

$$\dot{\Theta}(i\tau) = \frac{\Theta(i\tau) - \Theta((i-1)\tau)}{\tau}$$

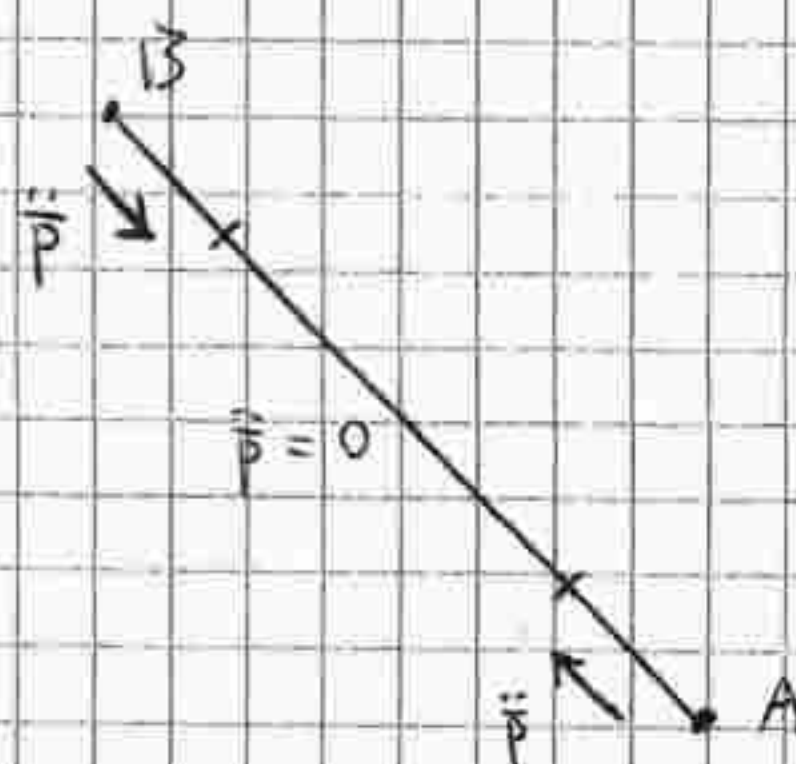
E l'accelerazione in quel tratto risulta:

$$\ddot{\Theta}(i\tau) = \frac{\dot{\Theta}(i\tau) - \dot{\Theta}((i-1)\tau)}{\tau}$$

LEGGE TEMPORALE di $s_{pr}(t)$

Voglio ricavare una legge lineare:

- parto da A fermo
- compio un tratto di accelerazione lineare costante lungo la retta di \ddot{p}
- mi muovo con velocità costante nel tratto centrale $\dot{p} = 0$
- nel tratto finale decelero costantemente $-\ddot{p}$ fino ad arrivare a B



Analizzando il primo tratto si può scrivere che:

$$\ddot{p}(t) = \ddot{p} \text{ costante}$$

$$\dot{p}(t) = \ddot{p} t$$

$$p(t) = p_A + \frac{1}{2} \ddot{p} t^2$$

Per far sì che la traiettoria sia rettilinea basta che \ddot{p} sia diretto lungo la congiungente dei punti A e B; così anche \dot{p} e \dot{p} avranno quella direzione.

Per imporre \ddot{p} lungo la congiungente si devono fissare posizione iniziale,

finale, accelerazione ed un parametro a scelta tra t_{t1} e t_{t2} .

LEGGE TEMPORALE di ${}^S R(t)$

44

La matrice di rotazione all'istante $t=0$ e $t=t_f$ è assegnata.

Non è possibile specificare l'orientamento dell'organo terminale tramite una matrice di rotazione perché, se si facesse, andrebbe a pianificare gli elementi della matrice in modo indipendente, non è detto che la matrice risultante sia ortogonale, e le matrici di rotazione ~~de~~ devono sempre esserlo. Un metodo efficace è invece quello di specificare la posizione tramite rotazione asse-angolo.

La matrice di rotazione ${}^S R$ può essere convertita nella rappresentazione asse-angolo in quanto uno dei suoi utilizzi è quello di rappresentare una rotazione attorno ad un asse: ${}^S K_A = \theta_A {}^S \hat{K}_A = \begin{bmatrix} K_{Ax} \\ K_{Ay} \\ K_{Az} \end{bmatrix}$.

In questo modo è possibile pianificare 3 possibili traiettorie, una per ciascun componente.

È necessario però adottare un accorgimento nella scelta dell'angolo di rotazione: esso infatti va a scalare la lunghezza del vettore ${}^S K_A$, facendo ruotare l'organo tensile un certo numero di volte, ma non va ad influenzare la posizione finale dello stesso. Conviene quindi scegliere il valore in modo da minimizzare la rotazione dell'organo tensile; la lunghezza migliore si ottiene volutando

$$\min |{}^S K_A - {}^S K_B|$$

PROBLEMI

- 1) La traiettoria può cadere all'esterno dello spazio ~~spazio~~ di lavoro, mentre pianificando nello spazio dei giunti si adatta automaticamente; quindi i punti pianificati nello spazio operativo vanno testati.
- 2) Si deve fare in modo di non avvicinarsi troppo alle singolarità cinematiche poiché esse richiederebbero velocità di giunto in finite ed il manipolatore cambierebbe traiettoria.